1. Trasformazioni di Lorentz

1.1 Principio di Relatività

La teoria della relatività ristretta si fonda su due principi fondamentali:

i) Il principio di invarianza;
ii) L'esistenza di una velocità limite per la propagazione dei segnali.

Il principio di invarianza relativistica è la naturale estensione del principio classico di invarianza galileiana: si suppone che esistano dei riferimenti *inerziali* e che le leggi della fisica siano invarianti nel passaggio da un riferimento inerziale ad un altro riferimento inerziale.

L'esistenza di una velocità limite è dettata dall'osservazione sperimentale che mostra come non esistano in natura interazioni istantanee. Esiste una velocità massima di propagazione delle interazioni, e questa non puo' dipendere dalla scelta del riferimento inerziale, per il principio (i). Questa velocità è denotata con c, e coincide con la velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto.

Una delle più ovvie conseguenze dei principi (i) e (ii) è che per le radiazioni elettromagnetiche un fronte d'onda sferico debba rimanere tale in qualunque riferimento inerziale. Consideriamo, in un riferimento inerziale O, un fronte d'onda che si propaga sfericamente partendo, al tempo $t = t_1$, dal punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Al tempo $t = t_2$ il generico punto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ appartenente al fronte d'onda deve soddisfare l'equazione della sfera:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2. \tag{1}$$

In un qualunque riferimento inerziale O', in moto rispetto ad O, il fronte d'onda deve ancora essere sferico, in virtù dei principi (i) e (ii), percui l'equazione (1) si trasforma nel riferimento O' nella seguente

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2. \tag{2}$$

Ovvero la quantità

$$\Delta\mathbf{r}^2 - c^2\Delta t^2 = invariante \tag{3}$$

dove $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $\Delta t = t_2 - t_1$. La trasformazione delle coordinate associata al cambio di riferimento deve essere tale da mantenere invariata tale quantità. Dunque in generale non si conservano le lunghezze ($\Delta\mathbf{r}^2$ non è invariante) e non si conservano gli intervalli di tempo. Si tratta di una geometria non euclidea nello spazio-tempo. La condizione (3) è sufficiente per la determinazione delle trasformazioni delle coordinate che prendono il nome di *Trasformazioni di Lorentz.*

1.2 Intervallo

Poichè lunghezze e tempi non si conservano separatamente, è opportuno lavorare in uno spazio-tempo a 4 dimensioni, ed imporre la condizione (3) che è equivalente alla definizione di una metrica nello spazio pseudo-euclideo.

Un punto dello spazio-tempo è detto *evento* ed è contraddistinto dall'insieme delle coordinate spaziali (x, y, z) che determinano il luogo in cui l'evento ha avuto luogo, e dalla coordinata temporale ct che determina l'istante in cui l'evento si verifica.

La distanza tra due eventi è l' *intervallo* Δs definito come

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \mathbf{r}^2. \tag{4}$$

La condizione (3) è quindi espressa affermando che l'intervallo tra due eventi è invariante per trasformazioni delle coordinate da un riferimento inerziale ad una altro. È chiaro che Δs^2 possa essere positivo, negativo o nullo. La sua invarianza permette di affermare che quando Δs^2 è positivo, esso è positivo in qualunque riferimento inerziale. Un tale intervallo è detto di genere temporale, e separa due eventi che non possono mai essere visti simultanei in alcun riferimento inerziale (esiste invece un riferimento inerziale in cui i due eventi avvengono nello stesso luogo). Analogamente quando Δs^2 è negativo, lo sarà in qualunque riferimento inerziale, e l'intervallo (detto di genere spaziale) separa due eventi che non possono mai essere visti accadere nello stesso luogo in alcun riferimento inerziale (esiste invece un riferimento inerziale in cui i due eventi sono simultanei).

Si dice *tempo proprio* il tempo misurato da un osservatore solidale con un riferimento O' che, in generale, non è inerziale. Tale tempo in generale differisce dal tempo misurato da qualunque riferimento inerziale. Per fissare le idee, consideriamo i due eventi corrispondenti all'avvio ed all'arresto di un cronometro solidale con O'. Dividiamo l'intervallo tra i due eventi in intervalli infinitesimi ds; per ognuno di essi possiamo supporre che O' sia inerziale (ma si muova con velocità diversa da punto a punto). Se l'osservatore solidale con O' (il cronometro) è fisso nell'origine di tale riferimento ($\mathbf{r}' = costante = 0$), allora

$$ds = \sqrt{c^2 dt'^2 - d\mathbf{r}'^2} = cdt'$$

dunque l'intervallo infinitesimo ds coincide con il tempo proprio. Calcolando ds in un riferimento inerziale O

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2} = cdt'$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla invarianza dell'intervallo. In definitiva

$$dt' = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt \tag{5}$$

dove v è la velocità dell'osservatore solidale con O' visto dal riferimento O (v è una funzione del tempo t). Infine integrando dal primo al secondo evento

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt \tag{6}$$

Osserviamo che il tempo proprio risulta massimo nel caso in cui $v = 0$.

1.3 Trasformazioni di Lorentz

Siano O ed O' due riferimenti inerziali con gli assi corrispondenti paralleli; O' si muova rispetto ad O con una velocità v parallela all'asse x. La trasformazione delle coordinate che lascia invariato l'intervallo è allora la seguente

$$x = \gamma(x' + \beta ct') \tag{7a}$$

$$y = y' \tag{7b}$$

$$z = z' \tag{7c}$$

$$ct = \gamma(ct' + \beta x') \tag{7d}$$

dove $\beta = v/c$ e

$$\gamma = \left(1 - \beta^2\right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Nel caso in cui v abbia una direzione arbitraria, occorre combinare una rotazione con la trasformazione (7), e in generale si ottiene un gruppo di trasformazioni non commutativo. La trasformazione inversa della (7) si ottiene banalmente sostituendo v con $-v$, e le lettere con apici con quelle senza (ciò è ovvio per il principio di relatività).

Per quanto riguarda le trasformazioni della velocità, differenziando le (7) si ottiene facilmente

$$V_x = \frac{V'_x + c\beta}{1 + \beta \frac{V'_x}{c}} \tag{8a}$$

$$V_y = \frac{V'_y}{\gamma \left(1 + \beta \frac{V'_x}{c}\right)} \tag{8b}$$

$$V_z = \frac{V'_z}{\gamma \left(1 + \beta \frac{V'_x}{c}\right)} \tag{8c}$$

dove (V_x, V_y, V_z) sono le tre componenti della velocità di un punto materiale misurata in O, mentre (V'_x, V'_y, V'_z) sono le componenti della stessa velocità misurata in O'.

1.4 Quadrivettori ed algebra 4-dimensionale

Possiamo rappresentare un generico evento dello spazio-tempo come un 4-vettore x di componenti x^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ ponendo $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$.

Il prodotto scalare tra due 4-vettori è definito come

$$x \cdot y = x^\mu x^\nu g_{\mu\nu} \tag{9}$$

(si assume la convenzione di sommatoria implicita sugli indici ripetuti) dove la matrice $g_{\mu\nu}$ definisce la metrica. Assumiamo la convenzione $1 = g_{00} = -g_{ii}$ per $i = 1, 2, 3$ ($g_{\mu\nu} = 0$ se $\mu \neq \nu$). Nel seguito le lettere dell'alfabeto greco si riferiscono a coordinate 4-dimensionali.

Le componenti covarianti di x sono definite come

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \equiv (ct, -x, -y, -z). \tag{10}$$

Il prodotto scalare può quindi essere espresso come

$$x \cdot y = x^\mu y_\mu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \tag{11}$$

e l'intervallo diventa

$$\Delta s^2 = \Delta x^\mu \Delta x_\mu. \tag{12}$$

Infine notiamo che

$$g_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu} \tag{13}$$

Osserviamo che non solo l'intervallo, ma qualunque prodotto scalare tra quadrivettori è uno scalare invariante per trasformazioni di Lorentz. Ciò segue immediatamente dalla definizione del prodotto scalare. Infatti le trasformazioni di Lorentz (7) si scrivono nel formalismo 4-dimensionale

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu$$

dove

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Notiamo innanzitutto che la matrice inversa della $\Lambda(\beta)$ si ottiene semplicemente cambiando il segno della velocità β. Ciò può essere verificato moltiplicando righe per colonne le due matrici:

$$\Lambda(\beta)^\mu{}_\nu \Lambda(-\beta)^\nu{}_\rho = \delta_{\mu\rho} \qquad (15).$$

Quindi verifichiamo l'invarianza del prodotto scalare:

$$x' \cdot y' = \left(\Lambda(\beta)^\mu{}_\nu x^\nu\right)\left(\Lambda(\beta)_\mu{}^\rho y_\rho\right) = \Lambda(\beta)^\mu{}_\nu \Lambda(\beta)_\mu{}^\rho x^\nu y_\rho$$

Moltiplicando righe per colonne osserviamo che

$$\Lambda(\beta)_\mu{}^\rho = g_{\mu\alpha} \Lambda(\beta)^\alpha{}_\delta g^{\delta\rho} = \Lambda(-\beta)^\mu{}_\rho \tag{16}$$

Poichè dalla sua definizione (14) $\Lambda^\mu{}_\nu = \Lambda^\nu{}_\mu$ è simmetrica, possiamo scrivere

$$\Lambda(\beta)^\mu{}_\nu \Lambda(\beta)_\mu{}^\rho = \Lambda(\beta)^\nu{}_\mu \Lambda(-\beta)^\mu{}_\rho = \delta^\nu{}_\rho = \delta_\nu{}^\rho$$

da cui segue

$$x' \cdot y' = \delta_\nu{}^\rho x^\nu y_\rho = x^\nu y_\nu = x \cdot y. \tag{17}$$

A questo punto possiamo generalizzare il concetto di 4-vettore che è molto utile per la descrizione in forma *covariante* di altre grandezze fisiche che non rappresentino necessariamente eventi nello spazio-tempo. Si dice *tensore* di ordine n una grandezza caratterizzata da n indici

$$T_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}$$

che, per trasformazioni di Lorentz,si trasforma nella maniera seguente

$$T'_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n} = \Lambda_{\lambda_1}{}^{\mu_1}\Lambda_{\lambda_2}{}^{\mu_2}\cdots\Lambda_{\lambda_n}{}^{\mu_n}T_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}. \tag{18}$$

Un tensore di ordine 0, non ha indici, e si dice scalare: esso è invariante per trasformazioni di Lorentz. I tensori di ordine 1 sono detti 4-vettori, e comprendono gli eventi dello spazio-tempo. Tra i tensori di ordine 2 troviamo la matrice $\Lambda^\mu{}_\nu$ e la metrica $g_{\mu\nu}$.

Le leggi della fisica, essendo invarianti per trasformazioni di Lorentz, devono essere esprimibili in forma covariante, utilizzando cioè il formalismo 4-dimensinale deve essere possibile esprimere tutte le relazioni invarianti come relazioni tra tensori.

1.5 Problemi svolti

Problema 1. (sessione straordinaria 1.2.1994) In un sistema di riferimento siano dati tre eventi: l'evento O coincide con l'origine delle coordinate spazio-temporali, l'evento A di coordinate ($ct_A = 2$, $x_A = 4$) e l'evento B di coordinate ($ct_B = 2.5$, $x_B = 6$). Determinare, se esiste, un sistema o una classe di sistemi di riferimento in cui l'ordine temporale degli eventi sia opposto, ovvero: $ct'_B < ct'_A < ct'_O$.

Suggerimento: Il problema si basa sulla relatività del concetto di simultaneità tra eventi. In particolare se due eventi sono separati da un intervallo di genere spaziale è sempre possibile determinare dei riferimenti inerziali in cui il primo evento preceda o segua il secondo. Se l'intervallo è di genere temporale ciò non è possibile (vedi §1.2).

Soluzione: Definiamo gli intervalli Δ^2_{OA} e Δ^2_{AB} che separano rispettivamente O da A ed A da B:

$$\Delta^2_{OA} = (ct_A)^2 - (x_A)^2$$

$$\Delta^2_{AB} = (ct_B - ct_A)^2 - (x_B - x_A)^2$$

(il problema è unidimensionale, cioè $y = z = 0$ per tutti gli eventi considerati, inoltre O è definito come $x = y = z = ct = 0$). Con i dati del problema troviamo $\Delta^2_{OA} = -12$, $\Delta^2_{AB} = -15/4$; gli intervalli sono entrambi di genere spaziale e dunque esistono in linea di principio dei riferimenti inerziali in cui gli eventi sono osservati in ordine temporale invertito. Più precisamente osserviamo che la differenza tra due eventi è ancora un 4-vettore dello spazio-tempo

$$\Delta_{AB}{}^{\mu} = x^{\mu}_A - x^{\mu}_B$$

$$\Delta_{OA}{}^{\mu} = x^{\mu}_O - x^{\mu}_A$$

ovviamente segue che

$$\Delta_{AB}{}^{\mu}\Delta_{AB\mu} = \Delta^2_{AB}$$

e l'intervallo non è altro che il quadrato del 4-vettore differenza $\Delta_{AB}{}^{\mu}$ (analogo ragionamento segue per l'intervallo OA). Le differenze $\Delta_{AB}{}^{\mu}$, $\Delta_{OA}{}^{\mu}$ si trasformano dunque tramite le trasformazioni di Lorentz (14) del §1.4:

$$\Delta'_{AB}{}^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\Delta_{AB}{}^{\nu}$$

La prima componente (quella temporale) di questo 4-vettore indica la differenza temporale tra i due eventi nel nuovo riferimento inerziale che viaggia con velocità β rispetto al riferimento di partenza. Dunque la condizione $\Delta'_{AB}{}^{0} = 0$ permette la determinazione della velocità β per cui i due eventi sono simultanei.

$$\Delta'_{AB}{}^{0} = \Lambda(\beta)^{0}{}_{\nu}\Delta_{AB}{}^{\nu} = \gamma\Delta_{AB}{}^{0} - \gamma\beta\Delta_{AB}{}^{1} = 0$$

(nel caso in questione le componenti y,z sono nulle, ma il ragionamento adottato è completamente generale). Possiamo concludere che gli eventi A e B sono simultanei nel riferimento O' che viaggia alla velocità

$$\beta_c = \frac{\Delta_{AB}{}^{0}}{\Delta_{AB}{}^{1}} = \frac{ct_A - ct_B}{x_A - x_B} = 0.25$$

Per tutti i riferimenti inerziali che si muovono con velocità superiore a β_c, la differenza temporale $\Delta'_{AB}{}^{0} < 0$; dunque l'ordine temporale degli eventi è invertito (A segue B). Lo stesso argomento applicato all'intervallo OA ci permette di determinare la velocità

$$\beta_c = \frac{\Delta_{OA}{}^{0}}{\Delta_{OA}{}^{1}} = \frac{ct_O - ct_A}{x_O - x_A} = 0.5$$

Dunque O segue A in un riferimento che viaggia ad una velocità $\beta > 0.5$; A segue B purchè la stessa velocià sia $\beta > 0.25$. In definitiva una classe di sistemi inerziali per cui i tre eventi sono osservati con l'ordine temporale invertito $ct'_B < ct'_A < ct'_O$ è rappresentata da tutti i riferimenti inerziali che si muovono con una velocità $\beta > 0.5$ rispetto al riferimento di partenza.

Approfondimento: Questa classe di riferimenti non è l'unica se si considerano anche riferimenti inerziali che viaggiano con direzioni diverse da quella dell'asse x. Ritornando alla condizione generale espressa in coordinate 4-dimensionali, osserviamo che, per un riferimento inerziale che viaggia in una direzione formante un angolo θ con l'asse x, la quantità ${\Delta_{AB}}^1$ va sostituita con la proiezione di questa lungo la direzione della velocità, cioè con la quantità ${\Delta_{AB}}^1 \cos(\theta)$ (ciò è dovuto al fatto che in generale le trasformazioni di Lorentz (14) valgono per un riferimento che ha l'asse x parallelo alla velocità; e su tale riferimento ${\Delta_{AB}}^1$ non è altro che la proiezione della distanza spaziale tra gli eventi lungo la direzione del moto). Un discorso analogo vale per l'intervallo OA. In generale possiamo affermare che l'ordine temporale dei tre eventi risulterà invertito in qualunque riferimento che viaggia ad una velocità

$$\beta > \frac{0.5}{\cos(\theta)}$$

dove θ è l'angolo formato dalla velocità con l'asse delle x.

Problema 2. (sessione ?) Due astronauti partono simultaneamente dalla terra per raggiungere una stella distante 2 anni-luce. Il primo viaggia ad una velocità costante pari a $\frac{4}{5}c$, il secondo ad una velocità costante pari a $\frac{3}{5}c$. Prima della partenza i due sincronizzano gli orologi. All'arrivo il primo astonauta aspetta il secondo e quindi i due confrontano gli orologi. Quale differenza di tempo segnano i due orologi?

Suggerimento: Occorre confrontare il tempo proprio dei due osservatori (§1.2). Poichè il secondo astronauta si muove sempre di moto rettilineo uniforme, il suo tempo proprio è sicuramente maggiore (il primo astronauta deve aspettare il secondo all'arrivo, dunque la sua velocità non è costante).

Soluzione: Applicando la formula (6) per il secondo astronauta otteniamo per il suo tempo proprio

$$T_2 = \sqrt{1 - (\beta_2)^2}\Delta t_2$$

dove β_2 è la sua velocità e Δt_2 è il tempo impiegato per raggiungere la stella (misurato dal riferimento fisso, solidale con la stella) cioè $c\Delta t_2 = \Delta x/\beta_2$ indicando con Δx la distanza tra la terra e la stella. Dunque

$$T_2 = \frac{\Delta x}{c\beta_2}\sqrt{1 - (\beta_2)^2}$$

Per il primo astronauta possiamo dividere l'integrale nella formula (6) del tempo proprio in due tratti: nel primo la velocità è β_1 diversa da zero, nel secondo tratto (corrispondente al tempo d'attesa) la velocità è nulla ed il tempo proprio coincide con il tempo d'attesa misurato dal riferimento fisso e vale $\Delta t_2 - \Delta t_1$:

$$T_1 = \sqrt{1-(\beta_1)^2}\Delta t_1 + (\Delta t_2 - \Delta t_1)$$

dove ovviamente Δt_1 è il tempo impiegato dal primo astronauta per raggiungere la stella $c\Delta t_1 = \Delta x/\beta_1$. Dunque

$$T_1 = \frac{\Delta x}{c\beta_1}\sqrt{1-(\beta_1)^2} + \frac{\Delta x}{c}\left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1}\right)$$

Da un confronto dei due tempi, T_1 e T_2, vediamo che alla fine l'orologio del secondo astronauta sarà avanti di un tempo

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{\Delta x}{c}\left(\frac{1}{\beta_2}\sqrt{1-(\beta_2)^2} - \frac{1}{\beta_1}\sqrt{1-(\beta_1)^2} - \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_1}\right)$$

Utilizzando i dati del problema

$$\Delta T = 2\cdot\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{5} - \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{5} - \frac{5}{3} + \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{3} anno = 4 mesi$$

Approfondimento: Lo stesso risultato può essere ricavato utilizzando l'invarianza dell'intervallo: denotiamo con O l'evento della partenza, con A l'arrivo del primo astronauta sulla stella, e con B l'arrivo del secondo. Le coordinate dei tre eventi sono (omettendo le componenti y e z, considerando il moto lungo l'asse x) $A \equiv (c\Delta t_1, \Delta x)$, $B \equiv (c\Delta t_2, \Delta x)$ ed $O \equiv (0,0)$. Nel riferimento solidale con il secondo astronauta il tempo trascorso coincide con l'intervallo OB diviso c. Nel riferimento solidale con il primo astronauta il tempo trascorso è la somma degli intervalli OA e AB divisa per c. Dunque

$$\Delta T = \frac{1}{c}(OB - OA - AB)$$

Ricordando la definizione di intervallo (4), ed utilizzando le coordinate dei tre eventi

$$OA = \sqrt{c^2\Delta t_1^2 - \Delta x^2}$$

$$OB = \sqrt{c^2\Delta t_2^2 - \Delta x^2}$$

$$AB = \Delta t_2 - \Delta t_1$$

Infine ricordando che $c\Delta t_1 = \Delta x/\beta_1$ e $c\Delta t_2 = \Delta x/\beta_2$ otteniamo per ΔT lo stesso risultato già ricavato con il metodo precedente.

Problema 3. (sessione estiva 25.6.1993) Due particelle, create a $t = 0$ a distanza L l'una dall'altra, viaggiano alla velocità v. La particella creata nell'origine decade al tempo $T/2$, la particella creata in L decade al tempo T. Se $L = vT$, sotto quali condizioni esiste una classe di sistemi di riferimento inerziali in cui l'ordine temporale dei due decadimenti è invertito? Determinare, se esiste, il riferimento inerziale in cui i due decadimenti sono simultanei.

Suggerimento: Calcolare l'intervallo tra i due decadimenti.

Soluzione: Consideriamo un riferimento in quiete, con l'asse x lungo la direzione di moto delle particelle. Essendo il problema unidimensionale, ignoriamo le coordinate y, z che sono poste uguali a zero. Nel piano x-ct la creazione delle due particelle è contraddistinta dagli eventi $C_1 \equiv (0,0)$ per la prima, e $C_2 \equiv (0, L) = (0, vT)$ per la seconda. Quando la prima delle due decade, dopo un tempo $T/2$, ha percorso una distanza $x_1 = vT/2$ dunque indichiamo il decadimento con l'evento $D_1 \equiv (cT/2, vT/2)$. Quando la seconda particella decade, dopo un tempo T, ha percorso la distanza $x_2 = vT$ e si trova quindi nel punto $x = vT + L = 2vT$; indichiamo il suo decadimento con l'evento $D_2 \equiv (cT, 2vT)$. L'intervallo tra i due eventi D_1 e D_2 si calcola facilmente

$$\Delta D^2 = (cT - cT/2)^2 - (2vT - vT/2)^2 = (T/2)^2 \cdot (c^2 - 9v^2).$$

Un riferimento inerziale in cui i due decadimenti abbiano un ordine temporale invertito può esistere solo se l'intervallo tra i due eventi è di genere spaziale, cioè se $\Delta D^2 < 0$. Dunque perchè una classe di tali riferimenti inerziali esista è necessario che

$$v > \frac{1}{3}c.$$

Sotto tale condizione è possibile trovare un riferimento in cui i due decadimenti siano simultanei: in tale riferimento infatti la componente temporale del 4-vettore $\Delta D^\mu = D_2^\mu - D_1^\mu$ deve annullarsi (rappresenta l'intervallo temporale tra i due eventi in tale riferimento). Ricordando le trasformazioni di Lorentz (14) del §1.4

$$\Delta D'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Delta D^\nu$$

scriviamo per la componente temporale

$$\Delta D'^0 = \Lambda(\beta)^0{}_\nu \Delta D^\nu = \gamma \Delta D^0 - \gamma\beta \Delta D^1 = 0$$

ovvero ricordando che $\Delta D^0 = cT/2$ e $\Delta D^1 = 3vT/2$ otteniamo

$$cT - \beta \cdot 3vT = 0$$

$$\beta = \frac{c}{3v}.$$

I due decadimenti sono simultanei in un riferimento che viaggia con velocità $\beta = c/(3v)$ nella direzione dell'asse x. Questa velocità è minore della velocità della luce solo se è soddisfatta la condizione $v > c/3$ che è ovviamente la stessa condizione ricavata inizialmente.

Approfondimento: Si noti che in generale esistono infiniti riferimenti inerziali in cui i due decadimenti sono simultanei, se si prendono in considerazione anche riferimenti che viaggiano con direzioni diverse da quella dell'asse x. In tal caso il valore di β determinato rappresenta il valore minimo, come si dimostra con ragionamento analogo a quello illustrato nell'approfondimento del problema 1.

Problema 4. (sessione estiva 90/91) Due fasci di muoni hanno velocità relativa v. L'osservatore O è solidale con uno dei fasci e l'osservatore O' è solidale con l'altro. All'istante $t = t' = 0$ si ha $x = x' = 0$. Per l'osservatore O il tempo di dimezzamento dei muoni del fascio solidale con O' è più grande del tempo di dimezzamento dei muoni del fascio con cui è solidale. Quindi secondo O i muoni del fascio a lui solidale decadono prima dei muoni solidali con O'. Per l'osservatore O' è esattamente il contrario. Discutere l'apparente paradosso.

Suggerimento: Alla base dell'apparente paradosso sta la relatività del concetto di simultaneità.

Soluzione: Supponiamo per ipotesi che tutti i muoni decadano dopo uno stesso tempo τ. Ovviamente tale tempo di decadimento va misurato nel riferimento solidale con la particella (tempo proprio §1.2). Generalizziamo il problema e supponiamo che ogni particella abbia una velocità diversa: sia v_i la velocità del muone i-esimo rispetto al riferimento inerziale O, e supponiamo che le particelle al tempo $t = 0$ transitino tutte dall'origine $x = 0$ (l'origine può essere considerata come la sorgente di particelle con velocità diversa). Chiamiamo con E_i l'evento corrispondente al decdimento della particella i-esima: essendo il problema unidimensionale ($y = 0, z = 0$) nel piano x-ct scriviamo in coordinate $E_i \equiv (ct_i, x_i)$. t_i è l'istante in cui l'osservatore solidale con O vede decadere la particella

i-esima. La retta OE_i è la *linea di universo* della particella i-esima, ed è costituita dalla successione di punti occupati dalla particella nel piano x-ct. Nel riferimento solidale con la particella tale linea di universo coincide con l'asse temporale (in tale riferimento la particella è ferma nell'origine), dunque è ovvio che in tale riferimento l'intervallo $OE_i^2 = c^2\tau^2$. D'altra parte essendo l'intervallo invariante per trasformazioni di Lorentz, possiamo calcolarlo nel riferimento O dove troviamo $OE_i^2 = c^2t_i^2 - x_i^2$. Dunque in definitiva le coordinate degli eventi E_i soddisfano l'equazione

$$c^2t_i^2 - x_i^2 = c^2\tau^2$$

Nel piano x-ct questa equazione descrive un iperbole: l'osservatore in O vede decadere le particelle in tempi diversi, nonostante gli intervalli OE_i^2 siano tutti uguali. In particolare se uno dei muoni ha velocità nulla, esso è solidale con O ed il suo tempo di decadimento in O è $ct = c\tau$ (graficamente il decadimento è individuato dalla intersezione tra la linea di universo della particella e l'iperbole; in questo caso la linea di universo è semplicemente l'asse temporale). Tutte le altre particelle con velocità diversa da zero sono invece viste decadere in tempi successivi. Ciò prova che effettivamente, nel riferimento solidale con una particella, tutte le altre particelle che viaggiano a velocità diverse sono viste decadere in tempi successivi (si veda in proposito la discussione sul tempo proprio §1.2). Non si tratta di un paradosso poichè l'intervallo tra due decadimenti qualunque, cioè l'intervallo tra due eventi che stanno sulla stessa falda dell'iperbole, è sempre di genere spaziale, ovvero $(E_iE_j)^2 < 0$. Dunque la successione temporale degli eventi dipende dalla scelta del riferimento (confronta con i problemi 1 e 3). Per dimostrare questa affermazione, ricordando l'invarianza dell'intervallo, consideriamo un riferimento O_i in cui la particella i-esima è in quiete. Le coordinate del suo decadimento sono $E_i \equiv (c\tau, 0)$. Per l'altra particella $E_j \equiv (ct_j, x_j)$ deve stare sulla stessa falda dell'iperbole passante per E_i dunque

$$c^2t_j^2 - x_j^2 = c^2\tau^2.$$

L'intervallo è presto calcolato

$$(E_iE_j)^2 = c^2(t_j - \tau)^2 - x_j^2 = c^2t_j^2 + c^2\tau^2 - 2c^2\tau t_j - x_j^2$$

Dalla relazione precedente ricaviamo ct_j e sostituiamo

$$ct_j = \sqrt{c^2\tau^2 + x_j^2}$$

$$(E_iE_j)^2 = c^2\tau^2 + x_j^2 + c^2\tau^2 - 2c\tau\sqrt{c^2\tau^2 + x_j^2} - x_j^2$$

$$(E_iE_j)^2 = 2c\tau\left(c\tau - \sqrt{c^2\tau^2 + x_j^2}\right) < 0$$

Approfondimento: Lo stesso risultato poteva essere dedotto geometricamente, considerando che l'iperbole ha per asintoti le rette bisettrici $ct_j = \pm x_j$: dunque la retta E_iE_j è sicuramente esterna al cono luce futuro del punto E_i, e l'intervallo è di genere spaziale.

Problema 5. (sessione invernale 12.2.93) Un missile di lunghezza $L_0 = 20m$ nel riferimento proprio si allontana dalla terra con moto rettilineo e uniforme. Alle estremità del missile sono installati due specchi. Un segnale luminoso emesso dalla terra raggiunge il missile e si riflette su ciascuno specchio. I due segnali tornano sulla terra con un ritardo l'uno rispetto all'altro di $\Delta T = 0.2\mu sec.$ Determinare la velocità del missile

Suggerimento: Considerare le linee di universo degli specchi e dei segnali luminosi

Soluzione: Nel riferimento O solidale con la terra, consideriamo le linee di universo dei raggi luminosi e dei due specchi solidali con il missile. Il problema è unidimensionale e possiamo lavorare agevolmente nel piano x-ct. Per fissare le idee supponiamo che a $t = 0$ lo specchio inferiore S_1 si trovi nel punto $x = 0$ (origine delle coordinate in O). La linea di universo di tale specchio è la retta $x = \beta ct$ dove β è la velocità del missile rispetto alla terra. La linea di universo dello specchio superiore S_2 sarà una retta parallela alla precedente (i due specchi viaggiano alla stessa velocità), e poniamo che tale retta sia $x = \beta ct + L$. Ovviamente la lunghezza L è la distanza tra i due specchi, all'istante $t = 0$, misurata nel riferimento O. Cioè si tratta della lunghezza del missile misurata nel riferimento O. Questa lunghezza è differente da L_0 (contrazione delle lunghezze) poichè il missile è in movimento rispetto ad O. Ad un certo tempo $t = t_0$ un raggio di luce parte dal punto $x = 0$. Nel riferimento O tale evento è $E_0 \equiv (ct_0, 0)$. La linea di universo del raggio di luce, che ovviamente viaggia a velocità c, è data dall'equazione $x = ct - ct_0$. Questa retta interseca le linee di universo di S_1 ed S_2 rispettivamente nei punti E_1 ed E_2, eventi che rappresentano la riflessione del raggio di luce dagli specchi. Nella riflessione la velocità del raggio di luce cambia istantaneamente il suo verso. Abbiamo due raggi riflessi: il primo, riflesso da S_1 si propaga con velocità $-c$ a partire da E_1. Il secondo, sempre con velocità $-c$ si propaga a partire da E_2. Le due corrispondenti linee di universo sono rette ortogonali alla linea di universo del raggio incidente (nel piano x-ct). È ovvio, anche graficamente, che per motivi di simmetria (inversione temporale) i tempi impiegati dai raggi per tornare al punto di partenza ($x = 0$) sono identici ai tempi impiegati per raggiungere i rispettivi specchi. Il ritardo tra i due raggi è alla fine uguale al doppio della differenza tra i tempi di percorrenza nei rispettivi tragitti di sola andata. Il calcolo di questi tempi è immediato dalla conoscenza delle coordinate degli eventi E_0, E_1 ed E_2. Le coordinate di E_1 si ottengono come intersezione delle due rette

$$\begin{cases} x = ct - ct_0 \\ x = \beta ct \end{cases}$$

Ovvero

$$E_1 \equiv \left(\frac{ct_0}{1-\beta}, \frac{\beta ct_0}{1-\beta} \right)$$

Analogamente per E_2 risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x = ct - ct_0 \\ x = \beta ct + L \end{cases}$$

da cui

$$E_2 \equiv \left(\frac{ct_0 + L}{1-\beta}, \frac{\beta ct_0 + L}{1-\beta} \right)$$

Infine per la differenza tra i tempi di percorrenza, sottraendo le coordinate temporali, (e moltiplicando per 2) troviamo

$$c\Delta T = \frac{2L}{1-\beta}$$

A questo punto occorre solo determinare la relazione tra L ed L_0. Consideriamo a questo proposito il riferimento O' solidale con il missile. Determiniamo quindi, in questo riferimento, le linee di universo dei due specchi S_1 ed S_2. Le trasformazioni di Lorentz si scrivono

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta ct') \\ ct = \gamma(ct' + \beta x') \end{cases}$$

da cui la linea di universo dello specchio S_1 di equazione $x = \beta ct$ diventa:

$$\gamma(x' + \beta ct') = \beta\gamma(ct' + \beta x')$$

ovvero

$$x' = 0$$

Infatti nel riferimento O' lo specchio S_1 è fermo nell'origine e la sua linea di universo coincide con l'asse temporale. Per lo specchio S_2 la linea di universo di equazione $x = \beta ct + L$ diventa:

$$\gamma(x' + \beta ct') = \beta\gamma(ct' + \beta x') + L$$

ovvero

$$(1-\beta^2)x' = \frac{L}{\gamma}$$

e ricordando la definizione di γ (§1.3)

$$x' = \gamma L$$

Nel riferimento O' la linea di universo dello specchio S_2 è una retta parallela all'asse temporale, infatti lo specchio, in tale riferimento solidale, è fermo nel punto $x' = \gamma L$. In questo riferimento la distanza tra i due specchi, che coincide con la lunghezza L_0 del missile, è semplicemente $L_0 = \gamma L$. Dunque possiamo affermare che la lunghezza del missile, misurata nel riferimento O, risulta contratta rispetto alla lunghezza misurata nel riferimento proprio O' (contrazione delle lunghezze):

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2}$$

Finalmente ricaviamo per il ritardo tra i due segnali luminosi

$$c\Delta T = 2L_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

Risolvendo per β

$$\beta = \frac{c^2\Delta T^2 - 4L_0^2}{c^2\Delta T^2 + 4L_0^2}$$

ed inserendo i dati del problema $L_0 = 2. \cdot 10^1 m$, $\Delta T = 2. \cdot 10^{-7} sec$, $c = 3. \cdot 10^8 m/sec$

$$\beta = \frac{36 \cdot 10^2 - 16 \cdot 10^2}{36 \cdot 10^2 + 16 \cdot 10^2} = \frac{20}{52} = 0.38$$

La velocità del missile è di $0.38c$.

Problema 6. (sessione straordinaria 10.3.95) Si considerino due osservatori O_1 e O_2 in moto inerziale rispetto ad un sistema di riferimento fisso O con velocità rispettivamente $\vec{v}_1 = (v_1, 0, 0)$ e $\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}, 0)$. Solidale con l'osservatore O_1 viene posto sull'asse $\hat{x}_1$ un regolo di lunghezza L_0. Calcolare la lunghezza del regolo misurata da O_2.

Soluzione: È opportuno, innanzitutto, determinare la velocità del riferimento O_2 rispetto al riferimento O_1. Poichè O_1 viaggia ad una velocità $\vec{v}_1$ rispetto ad O, possiamo affermare che il riferimento O viaggia ad una velocità $-\vec{v}_1$ rispetto ad O_1. Inoltre O_2 viaggia ad una velocità $\vec{v}_2$ rispetto ad O. Dunque possiamo concludere che la velocità del riferimento O_2 rispetto al riferimento O_1 si ottiene dalla composizione delle velocità $-\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. In altri termini, occorre effettuare l'opportuna trasformazione della velocità $\vec{v}_2$ passando dal riferimento O al riferimento O_1. Denotando con β_1 la velocità $\beta_1 = v_1/c$ osserviamo che la trasformazione cercata è l'inversa della trasformazione (8) del §1.3, cioè si ottiene dalle (8) sostituendo β con $-\beta_1$. Denotando con $\vec{v}_{12} \equiv (v_{12x}, v_{12y}, 0)$ la velocità di O_2 ripsetto ad O_1 abbiamo

$$v_{12x} = \frac{v_{2x} - c\beta_1}{1 - \beta_1 \frac{v_{2x}}{c}}$$

$$v_{12y} = \frac{v_{2y}}{\gamma_1 \left(1 - \beta_1 \frac{v_{2x}}{c}\right)}$$

Denotiamo θ l'angolo formato da questa velocità $\vec{v}_{12}$ e l'asse $\hat{x}_1$ di O_1. Per conoscere la lunghezza del regolo misurata da O_2 occorre ragionare in maniera simile a quanto fatto nella risoluzione del problema 5 (contrazione delle lunghezze). Tuttavia, poichè l'angolo $\theta \neq 0$, non è possibile applicare le trasformazioni di Lorentz nella forma delle equazioni (7). Queste presuppongono infatti che la velocità sia parallela all'asse $\hat{x}_1$. Dobbiamo prima effettuare una rotazione del riferimento O_1 di un angolo θ in modo da riportare l'asse $\hat{x}_1$ in direzione della velocità $\vec{v}_{12}$. Le funzioni trigonometriche dell'angolo θ si ottengono agevolmente dalle componenti di $\vec{v}_{12}$:

$$\tan\theta = \frac{v_{2y}}{\gamma_1(v_{2x} - c\beta_1)}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{\gamma_1^2(v_{2x} - c\beta_1)^2}{\gamma_1^2(v_{2x} - c\beta_1)^2 + v_{2y}^2}$$

$$\cos\theta = \frac{\gamma_1(v_{2x} - c\beta_1)}{\sqrt{\gamma_1^2(v_{2x} - c\beta_1)^2 + v_{2y}^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{v_{2y}}{\sqrt{\gamma_1^2(v_{2x} - c\beta_1)^2 + v_{2y}^2}}$$

Supponiamo che la prima estremità del regolo coincida con l'origine delle coordinate nel riferimento O_1. Nella rotazione di θ la seconda estremità del regolo, prima individuata in O_1 dal vettore $(L_0, 0, 0)$, risulta ora individuata dal vettore ruotato $(L_0\cos\theta, -L_0\sin\theta, 0)$. Con un ragionamento analogo a quello del problema 5, consideriamo la linea di universo di entrambe le estremità del regolo. In O_1 per la prima estremità abbiamo $x_1 = 0, y_1 = 0$ (asse temporale); per la seconda estremità abbiamo $x_1 = L_0\cos\theta$, $y_1 = -L_0\sin\theta$ (retta parallela all'asse temporale). Denotando con $\beta_{12} = |\vec{v}_{12}|/c$, possiamo applicare le trasformazioni di Lorentz nella forma (7) (infatti ora $\vec{v}_{12}$ è parallela al nuovo asse $\hat{x}_1$ di O_1), e ricaviamo le nuove linee di universo per le estremità del regolo, osservate da O_2: otteniamo rispettivamente per la prima estremità

$$x_1 = \gamma_{12}(x_2 + \beta_{12}ct_2) = 0$$

$$y_1 = y_2 = 0$$

e per la seconda estremità

$$x_1 = \gamma_{12}(x_2 + \beta_{12}ct_2) = L_0\cos\theta$$

$$y_1 = y_2 = -L_0\sin\theta$$

Queste equazioni lineari rappresentano delle rette non parallele all'asse temporale: infatti in O_2 il regolo appare in movimento. L'osservatore solidale con O_2 considera simultanei gli eventi con coordinata temporale t_2 uguale. Consideriamo ad esempio eventi con $t_2 = 0$: per la prima estremità otteniamo semplicemente $x_2 = 0$ e $y_2 = 0$. Per la seconda estremità ricaviamo $x_2 = (L_0 \cos\theta/\gamma_{12})$ e $y_2 = -L_0 \sin\theta$. Per l'osservatore solidale con O_2, al tempo $t_2 = 0$, il regolo ha ancora la prima estremità coincidente con l'origine, e la seconda estremità individuata dal vettore $(L_0 \cos\theta/\gamma_{12}, -L_0 \sin\theta)$. Osserviamo che non per caso la seconda componente di questo vettore è rimasta invariata: si tratta della componente perpendicolare alla direzione di moto di O_2 rispetto ad O_1. Le trasformazioni di Lorentz infatti mescolano tra di loro solo la componente temporale e la componente parallela alla direzione di moto. Dunque l'osservatore solidale con O_2 vede un regolo che ha la stessa componente in direzione perpendicolare al moto, ed una lunghezza contratta del fattore $1/\gamma_{12} = \sqrt{1-\beta_{12}^2}$ per quanto riguarda la componente parallela al moto. In definitiva la lunghezza del regolo, misurata da O_2, è il modulo del vettore

$$L = L_0 \sqrt{\cos^2\theta(1-\beta_{12}^2) + \sin^2\theta} = L_0 \sqrt{1-\beta_{12}^2 \cos^2\theta}$$

A questo punto ricordiamo che la componente $v_{12x} = c\beta_{12}\cos\theta$ e sostituendo l'espressione ricavata precedentemente per v_{12x} otteniamo

$$L = L_0 \frac{\sqrt{(1-\beta_1^2)(1-\frac{v_{2x}^2}{c^2})}}{1-\beta_1 \frac{v_{2x}}{c}}$$

Approfondimento: La soluzione del problema fin qui discussa non è la più semplice, ma è stata preferita da un punto di vista pedagogico per la sua generalità di applicazione. Una soluzione più semplice emerge già da un'analisi della semplicità del risultato: questo non dipende da v_{2y}. Ci si può convincere della correttezza di tale risultato facendo il seguente ragionamento: la velocità $\vec{v}_2$ può essere considerata come la composizione tra una velocità $\vec{v}_a \equiv (v_{2x}, 0, 0)$ parallela all'asse $\hat{x}_1$ ed una opportuna velocità $\vec{v}_b \equiv (0, v_b, 0)$ perpendicolare all'asse $\hat{x}_1$. Introduciamo il riferimento O_a che viaggia ad una velocità $\vec{v}_a$ rispetto ad O. La trasformazione da O_1 ad O_2 può essere vista come la composizione delle trasformazioni $O_1 \to O \to O_a \to O_2$. Le prime due trasformazioni connettono sistemi di riferimento che viaggiano l'uno rispetto all'altro nella direzione $\hat{x}_1$. La misura della lunghezza del regolo, solidale con il riferimento O_1, eseguita da un osservatore solidale con O_a si ottiene applicando due volte in successione il solito ragionamento sulla trasformazione delle linee di universo (doppia contrazione). Infine la misura della lunghezza del regolo effettuata da un osservatore solidale con O_2 non può differire dalla misura effettuata in O_a, poichè O_2 si muove rispetto ad O_a in direzione perpendicolare al regolo (e le trasformazioni di Lorentz lasciano invariate le componenti perpendicolari al moto). Dunque la contrazione osservata da O_2 è identica a quella osservata da O_a. Il lettore si convincerà facilmente che la doppia contrazione osservata da un osservatore solidale con O_a coincide proprio con il risultato ricavato con il metodo precedente.

1.6 Problemi proposti

Problema 1. (sessione estiva - giugno 1991) Un muone si muove lungo l'asse x di un riferimento inerziale O, con velocità v, con posizione iniziale $x(0) = 0$, ed un fotone si muove lungo l'asse x nella stessa direzione con posizione iniziale $-ct_0$. Il fotone ed il muone hanno la stessa coordinata spaziale dopo un tempo pari al tempo di decadimento del muone misurato nel riferimento O. Denotando con τ_0 il tempo di decadimento del muone misurato nel suo riferimento proprio, determinare la velocità del muone.

Problema 2. (sessione autunnale - dicembre 1991) Una particella ed un fotone viaggiano lungo l'asse Y del riferimento O secondo le equazioni del moto

$$y = -y_0 + 0.25ct \qquad (particella)$$

$$y = -2y_0 + ct \qquad (fotone)$$

dove y_0 è una costante positiva. Determinare la posizione e l'istante in cui le due particelle si incontrano nel riferimento O' in moto lungo l'asse X di O con velocità $v_0 = \frac{3}{2}c$.

Problema 3. (sessione autunnale - ottobre 1991) Due particelle viaggiano con velocità V costante parallelamente all'asse Y e ad una distanza D l'una dall'altra nel riferimento O. Allo stesso istante $t = t_0$ incontrano l'asse x. Consideriamo il riferimento O' il cui asse x' scorre di moto rettilineo uniforme a velocità V_0 sull'asse x di O. Si vuol sapere se in O' le due particelle raggiungono simultaneamente l'asse x' e, nel caso in cui ciò non succeda, qual'è la coordinata y' di una delle due particelle quando l'altra raggiunge l'asse x'.

2. Energia e Impulso

2.1 Particella libera

Consideriamo il moto di una particella libera. Per particella intendiamo un qualunque oggetto, anche composto, che si muove come un tutt'uno. La particella è libera se su di essa non agisce alcuna forza esterna. La lagrangiana si scrive come

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{1}$$

dove $\vec{v}$ è la velocità istantanea della particella.

L'impulso si ottiene dalla lagrangiana derivando:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$

Infine per l'energia troviamo

$$E = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3}$$

Energia ed impulso sono grandezze conservate, poichè come in meccanica classica, si tratta delle funzioni generatrici di trasformazioni canoniche infinitesime che lasciano la lagrangiana invariata (traslazioni spaziali e temporali). Anche nel caso in cui il corpo in movimento è costituito da più parti interagenti tra di loro, in assenza di forze esterne, E e $\vec{p}$ rappresentano l'energia totale e l'impulso totale del sistema, e sono grandezze conservate. Se $\vec{v} = 0$ ed il sistema in studio è fermo (inteso come un tutt'uno), allora $E = mc^2$, e la massa m è proporzionale all'energia a riposo del sistema. Tale energia comprende le energie a riposo delle particelle costituenti del sistema, le loro energie cinetiche e l'energia potenziale di interazione tra le particelle. Dunque è evidente che la massa non sia una grandezza conservata (la massa m non è la somma delle masse delle singole parti che compongono il corpo).

Da un confronto delle eq.(2) e (3) appare evidente che

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v} \tag{4}$$

e sottraendo i quadrati delle eq. (2) e (3) ricaviamo

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 \tag{5}$$

2.2 Quadrivettore energia-impulso

È possibile riscrivere i risultati del paragrafo precedente in forma covariante. A partire dalla definizione di intervallo infinitesimo data nel §1.2,

$$ds = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} cdt$$

definiamo il 4-vettore velocità

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \tag{6}$$

Si tratta evidentemente di un 4-vettore essendo il quoziente tra il 4-vettore dx^μ e lo scalare invariante ds. Per una particella libera le equazioni del moto in forma covariante sono semplicemente $u^\mu = costante$ (velocità costante). Notiamo adesso, confrontando con le definizioni (2),(3) che $mcu^i = p^i$ per $i = 1, 2, 3$ e $mcu^0 = E/c$. Denotiamo con P^μ il 4-vettore

$$P^\mu = mcu^\mu \equiv \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \tag{7}$$

che è detto 4-vettore Energia-Impulso. Dall'eq.(5) poi segue il quadrato di tale vettore

$$P^\mu P_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 \tag{8}$$

che è uno scalare invariante. Si tratta inoltre di una grandezza conservata. Abbiamo il duplice vantaggio di disporre, anche nel caso di un sistema composto di più parti, di una grandezza scalare (invariante per trasformazioni di Lorentz) e conservata (al variare del tempo). In particolare nel riferimento del centro di massa, in cui per definizione $\vec{p} = 0$, il quadrato del 4-vettore energia-impulso $P^\mu P_\mu = E^2/c^2$ coincide (a meno di un fattore c^2) con l'energia totale del sistema al quadrato. Inoltre, a differenza della massa che non è conservata, il 4-vettore energia-impulso è un integrale primo del moto additivo: si calcola semplicemente sommando le singole componenti relative alle particelle che compongono il sistema. Questa proprietà è particolarmente utile per lo studio dei processi d'urto o di decadimento di particelle.

2.3 Urto e decadimento di particelle

Consideriamo un generico processo in cui n particelle, inizialmente indipendenti, interagiscono in una regione dello spazio-tempo. Dalla regione di interazione emergono m

particelle (in genere $m \neq n$) che si allontanano come particelle indipendenti. Assumiamo in generale che nella regione di interazione possano avere luogo delle reazioni, per cui i prodotti espulsi hanno in generale masse differenti da quelle delle particelle inizialmente interagenti. Denotiamo con P_i^μ per $i = 1, 2, \cdots, n$ i 4-impulsi iniziali delle n particelle interagenti, misurati nel riferimento del laboratorio prima della collisione. Utilizzando l'additività del 4-vettore energia-impulso calcoliamo

$$P^\mu = \sum_{i=1}^{n} P_i^\mu$$

che rappresenta l'energia-impulso totale del sistema considerato come un unico blocco. Questa grandezza si conserva, dunque rimane invariata nel tempo, prima, durante e dopo la regione di interazione. In particolare utilizzando l'equazione (4) vediamo che il sistema si muove come un unico blocco con velocità

$$\vec{v} \equiv \left(cP^1/P^0, cP^2/P^0, cP^3/P^0\right)$$

In un riferimento inerziale in moto con velocità $\vec{v}$, il sistema è in quiete, e tale riferimento coincide quindi con il riferimento del centro di massa. Infatti nel riferimento del centro di massa il vettore impulso totale deve essere nullo: si vede agevolmente che ciò si verifica considerando un riferimento orientato opportunamente con l'asse $\hat{x}$ parallelo alla velocità $\vec{v}$. In tale riferimento $v^2 = v^3 = 0$ e $P^2 = P^3 = 0$. Dunque $|\vec{v}| = |v^1| = |cP^1/P^0|$. Considerando le trasformazioni di Lorentz (14) del §1.4 con $\beta = P^1/P^0$, il 4-vettore energia-impulso diventa nel riferimento del centro di massa

$$P'^\mu = \Lambda(-\beta)^\mu{}_\nu P^\nu \equiv \left(\gamma P^0 - \beta\gamma P^1, -\beta\gamma P^0 + \gamma P^1, 0, 0\right)$$

$$P'^\mu \equiv \left(\sqrt{(P^0)^2 - (P^1)^2}, 0, 0, 0\right).$$

Essendo nullo l'impulso, nel riferimento del centro di massa l'energia E_{cm} risulta proporzionale al modulo del 4-vettore:

$$\left(\frac{E_{cm}}{c}\right)^2 = P'^\mu P'_\mu = M^2 c^2$$

Questo modulo è invariante per trasformazioni di Lorentz (scalare) e può essere calcolato direttamente nel riferimento del laboratorio utilizzando il 4-vettore P^μ. La massa M rappresenta la massa a riposo di tutto il sistema (è dunque diversa dalla somma delle singole masse). A meno di una costante moltiplicativa questa massa coincide con l'energia totale E_{cm} del sistema nel riferimento del centro di massa. Questa grandezza è di notevole importanza quando si vuole stabilire se un determinato processo può avere luogo: infatti la stessa quantità, già determinata in base agli impulsi iniziali delle particelle, può essere calcolata analogamente utilizzando gli impulsi dei prodotti della reazione ovvero delle particelle che escono dalla regione di interazione. Quando tali particelle sono sufficientemente lontane dalla regione di interazione, si muovono come particelle indipendenti, e l'energia totale è uguale alla somma delle energie. Lavorando nel riferimento del centro di massa e denotando con Q_i^μ per $i = 1, 2 \cdots, m$ i 4-impulsi delle particelle uscenti

$$E_{cm} = \sum_{i=1}^{m} c Q_i^0$$

Ricordando la relazione (8)

$$(Q_i^0)^2 = \left(m_i^2 c^2 + \vec{Q}_i^2 \right) \geq (m_i c)^2$$

dove m_i è la massa a riposo della i-esima particella. Dunque in definitiva

$$Mc^2 = E_{cm} \geq \sum_{i=1}^{m} m_i c^2$$

ovvero

$$M \geq \sum_{i=1}^{m} m_i \tag{9}$$

che indica come il processo sia possibile solo se la somma delle masse a riposo delle particelle uscenti non supera la massa a riposo del sistema totale M.

Nel caso del decadimento di una particella l'analisi è identica, con l'unica differenza che vi è inizialmente una sola particella ($n = 1$). Dunque il riferimento del centro di massa coincide con il riferimento in cui la particella è inizialmente in quiete, e la massa totale M del sistema coincide con la massa a riposo della particella prima del decadimento. Concludiamo analogamente che in questo caso la somma delle masse dei prodotti del decadimento non può superare la massa a riposo della particella che decade.

2.4 Problemi svolti

Problema 1. (Sessione Autunnale 90/91) Un elettrone effettua una collisione elastica centrale con un protone in quiete. Determinare l'energia cinetica iniziale T dell'elettrone supposto che l'energia cinetica finale del protone sia $T/2$.

Suggerimento: Applicare il principio di conservazione del 4-vettore energia-impulso.

Soluzione: Una possibile soluzione del problema consiste nella semplice applicazione del principio di conservazione del 4-vettore energia-impulso. L'energia iniziale dell'elettrone è $E_e = mc^2 + T$. L'energia iniziale del protone coincide con la sua energia a riposo $E_p = Mc^2$ (siano m ed M rispettivamente le masse dell'elettrone e del protone). Per l'impulso, ricordando l'equazione (5)

$$P_e = \sqrt{E_e^2/c^2 - m^2c^2} = \frac{1}{c}\sqrt{(mc^2 + T)^2 - m^2c^4} = \frac{1}{c}\sqrt{T^2 + 2Tmc^2}$$

mentre l'impulso del protone è ovviamente nullo. Dopo l'urto l'energia dell'elettrone è $E_e = mc^2 + T_f$ e per ipotesi l'energia del protone è $E_p = Mc^2 + T/2$. Eguagliando l'energia totale prima e dopo l'urto segue che $T_f = T/2$, ovvero l'energia cinetica è suddivisa equamente tra le due particelle. Essendo l'urto centrale, il problema è unidimensionale, e l'elettrone dopo l'urto avrà un impulso negativo, mentre il protone acquisirà un impulso positivo. L'impulso delle due particelle segue dalla loro energia dopo l'urto, con l'uso della relazione (5)

$$P_e = -\sqrt{E_e^2/c^2 - m^2c^2} = -\frac{1}{c}\sqrt{(mc^2 + T/2)^2 - m^2c^4} = -\frac{1}{c}\sqrt{T^2/4 + Tmc^2}$$

$$P_p = \sqrt{E_p^2/c^2 - M^2c^2} = \frac{1}{c}\sqrt{(Mc^2 + T/2)^2 - M^2c^4} = \frac{1}{c}\sqrt{T^2/4 + TMc^2}$$

Dalla conservazione dell'impulso prima e dopo l'urto:

$$-\frac{1}{c}\sqrt{T^2/4 + Tmc^2} + \frac{1}{c}\sqrt{T^2/4 + TMc^2} = \frac{1}{c}\sqrt{T^2 + 2Tmc^2}$$

Da cui quadrando due volte si ottiene

$$T = \frac{c^2(M^2 + m^2 - 6mM)}{2M}$$

Approfondimento: È istruttivo esaminare un'altra via di risoluzione che è particolarmente utile nel caso più realistico di processi non unidimensionali. Calcoliamo la velocità del centro di massa utilizzando l'equazione (4) (vedi §2.3)

$$\beta = c^2\frac{P}{E} = \frac{\sqrt{T^2 + 2mc^2T}}{T + (M+m)c^2}$$

Denotando al solito $\gamma^{-1} = \sqrt{1-\beta^2}$, osserviamo che nel riferimento del centro di massa il protone, prima dell'urto, si muove con velocità $-\beta$, dunque il suo impulso è (eq. (2)) $P' = -\gamma Mc\beta$, mentre la sua energia (eq. (3)) $E' = \gamma Mc^2$. In tale riferimento le due particelle hanno un impulso uguale e opposto (l'impulso totale deve essere nullo). Dopo l'urto entrambe le particelle invertono il loro impulso, e consevano la loro energia. Dunque dopo l'urto $P' = \gamma Mc\beta$, $E' = \gamma Mc^2$. Passiamo infine al riferimento del laboratorio applicando le trasformazioni di Lorentz al 4-vettore $(E'/c, P')$

$$P = \gamma(P' + \beta E'/c)$$

$$E/c = \gamma(E'/c + \beta P')$$

ottenendo l'energia E e l'impulso P del protone nel riferimento originale (quello del laboratorio). Imponendo che l'energia cinetica del protone sia $T/2$

$$E = \frac{T}{2} + Mc^2 = c\gamma(E'/c + \beta P')$$

e sostituendo le espressioni ricavate per E' e P'

$$\frac{T}{2} + Mc^2 = \gamma^2 Mc^2(1+\beta^2)$$

Quindi sostituendo le definizioni di β e γ in termini di T e risolvendo per T ricaviamo

$$T = \frac{c^2(M^2 + m^2 - 6mM)}{2M}$$

Problema 2. (Settembre 91) Una particella di energia E_1 incide su una particella in quiete e viene deviata di un angolo θ. Le due particelle hanno la stessa massa m. Sia E_3 l'energia della particella deviata con $E_3 = E_1/2$. Supponendo che E_1 sia proporzionale all'energia a riposo mc^2, cioè $E_1 = kmc^2$, con k costante, determinare l'espressione di $\cos\theta$ in funzione di k e giustificare la necessità di porre $k > 2$.

Suggerimento: Applicare il metodo discusso nell'approfondimento del problema precedente.

Soluzione: Indichiamo con $1, 2$ rispettivamente la particella incidente e quella in quiete, e con $3, 4$ rispettivamente la prima particelle deviata, e la seconda dopo l'urto. Ovviamente $E_2 = mc^2$, $P_2 = 0$, $E_1 = kmc^2$. L'impulso della prima particella si ricava con l'ausilio della formula (5)

$$P_1 = \sqrt{E_1^2/c^2 - m^2c^2} = mc\sqrt{k^2-1}$$

Dunque l'energia e l'impulso totali sono

$$E = (k+1)mc^2$$

$$P = mc\sqrt{k^2-1}$$

La velocità del centro di massa segue agevolmente

$$\beta = c\frac{P}{E} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}$$

La particella 2, inizialmente ferma, si muove nel riferimento del centro di massa con velocità $-\beta$ ed il suo impulso è (eq.(2))

$$P'_2 = -mc\gamma\beta$$

con l'usuale definizione di γ in funzione di β. Poichè l'impulso totale è nullo nel riferimento del centro di massa, la particella 1 ha un impulso $P'_1 = -P'_2$. L'energia delle due particelle è, dall'equazione (3), $E'_1 = E'_2 = \gamma mc^2$. Nell'urto l'energia si conserva $E'_3 = E'_1$, e dunque i due impulsi non possono cambiare in modulo. Essi possono tuttavia ruotare di un angolo arbitrario χ, mantenendosi l'uno l'opposto dell'altro. Denotando con $\hat{x}$ il versore parallelo alla direzione di moto della particella 1 prima dell'urto, abbiamo dopo l'urto, per la componente x dell'impulso, $P'_{3x} = P'_1 \cos\chi = mc\gamma\beta\cos\chi$. Ritornando al riferimento iniziale, solidale con il laboratorio, le trasformazioni di Lorentz lasciano invariate le componenti di P' ortogonali alla direzione del moto $\hat{x}$, e mescolano invece la componenete parallela P'_{3x} con la componente temporale E'_3/c. Le nuove componenti del 4-vettore energia-impulso, nel riferimento del laboratorio, sono

$$P_{3x} = \gamma(P'_{3x} + \beta E'_3/c)$$

$$E_3/c = \gamma(E'_3/c + \beta P'_{3x})$$

ovvero

$$P_{3x} = mc\beta\gamma^2(1 + \cos\chi)$$

$$E_3 = mc^2\gamma^2(1 + \beta^2\cos\chi)$$

A questo punto imponiamo, come richiesto dal testo, che $E_3 = kmc^2/2$

$$\frac{k}{2}mc^2 = mc^2\gamma^2(1 + \beta^2\cos\chi)$$

ricordando che

$$\beta^2 = \frac{k-1}{k+1}$$

$$\gamma^2 = \frac{k+1}{2}$$

otteniamo per $\cos\chi$

$$\cos\chi = \frac{1}{1-k}$$

Questo risultato ha senso fisico solo se $\cos^2\chi < 1$ ovvero se $k > 2$. Per $k = 2$ si ha uno scattering all'indietro (l'urto centrale del problema precedente), che nel caso di masse uguali si riduce ad uno scambio totale di energia ed impulso tra le particelle (la particella incidente si arresta). Che $k = 2$ sia il caso limite, in cui la particella deviata in realtà si arresta, poteva essere notato anche all'inizio considerando che per $k = 2$ segue $E_3 = kmc^2/2 = mc^2$ che è l'energia a riposo della particella (l'energia cinetica dunque è nulla). Per completare sostituendo l'espressione di $\cos\chi$ nella espressione per P_{3x} e ricordando la definizione di β e γ

$$P_{3x} = \frac{1}{2}mc(k-2)\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

Il modulo dell'impulso P_3 può essere ricavato direttamente dalla conoscenza dell'energia

$$P_3 = \sqrt{E_3^2/c^2 - m^2c^2} = mc\sqrt{k^2/4 - 1}$$

e da un confronto con il valore della sua proiezione sull'asse $\hat{x}$

$$\cos\theta = \frac{P_{3x}}{P_3} = \sqrt{\frac{(k+1)(k-2)}{(k-1)(k+2)}}$$

Problema 3. (Sessione straordinaria 12-2-1993) Sia data la reazione di creazione di coppia

$$\gamma + e^- \to (e^+ + e^-) + e^-$$

dove l'elettrone bersaglio è supposto a riposo nel laboroatorio. Determinare l'energia di soglia del fotone affinchè la reazione possa avvenire. Ricordare che la massa dell'elettrone è 0.51 MeV.

Suggerimento: Si confronti la massa totale del sistema prima della reazione con la massa dei prodotti di reazione (vedi §2.3).

Soluzione: Nel riferimento del laboratorio, prima dell'urto, l'energia totale del sistema è data dalla somma delle energie del fotone e dell'elettrone (a riposo):

$$E_T = E_\gamma + mc^2$$

Poichè l'elettrone è in quiete il suo impulso è nullo, e l'impulso totale del sistema coincide con l'impulso del fotone:

$$P_T = \frac{E_\gamma}{c}$$

La massa totale M del sistema (considerato come un unico blocco) si ottiene dal modulo quadro del 4-vettore energia-impulso:

$$M^2c^2 = \left(\frac{E_T}{c}\right)^2 - P_T^2 = \left(\frac{E_\gamma}{c} + mc\right)^2 - \frac{E_\gamma^2}{c^2}$$

ovvero

$$M = \sqrt{m^2 + 2m(E_\gamma/c^2)}$$

Come discusso nel paragrafo §2.3, la massa M è uno scalare invariante per trasformazioni di Lorentz, e al contempo una grandezza conservata nell'urto. In particolare la massa del sistema è uguale ad M anche dopo l'urto e nel riferimento del centro di massa, dove coincide con l'energia totale del sistema divisa per c^2 (l'impulso totale è nullo in tale riferimento). Si deduce che affinchè la reazione possa avere luogo deve essere

$$M > 3m$$

poichè altrimenti l'energia cinetica dei prodotti di reazione sarebbe nulla o negativa. Dalla condizione

$$M = \sqrt{m^2 + 2m(E_\gamma/c^2)} > 3m$$

quadrando e risolvendo rispetto ad E_γ segue la condizione

$$E_\gamma > 4mc^2$$

Ricordando che $mc^2 = 0.51 MeV$, l'energia di soglia richiesta è di 2.04 MeV.

Approfondimento: Si noti che il risultato differisce dalla semplice somma delle energie a riposo delle particelle create. Ovvero, anche se nel processo si crea solo una coppia elettrone-positrone, un fotone di energia pari a $2mc^2$ non è sufficiente: infatti non basta garantire la conservazione della energia, ma occorre che si conservi anche l'impulso. I prodotti della reazione devono cioè avere una energia cinetica sufficiente a garantire il trasporto di un impulso uguale a quello del fotone incidente.

Problema 4. (Sessione autunnale 5-10-1994) Un fotone di energia E_1 collide ad un angolo θ con un altro fotone di energia E_2. Calcolare il valore di soglia E_{1min} che permette la formazione di una coppia di particelle di massa m.

Suggerimento: Utilizzare lo stesso metodo del problema precedente.

Soluzione: Consideriamo un riferimento ortogonale in cui il primo fotone viaggia lungo l'asse x, ed il secondo nel piano xy. L'impulso del primo fotone ha componenti $P_{1x} = E_1/c$ e $P_{1y} = P_{1z} = 0$. Per il secondo fotone invece $P_{2x} = (E_2/c)\cos\theta$, $P_{2y} = (E_2/c)\sin\theta$, $P_{2z} = 0$. Il 4-vettore energia impulso totale ha le seguenti componenti:

$$P_T^\mu \equiv \left(\frac{E_1 + E_2}{c}, \frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c}\cos\theta, \frac{E_2}{c}\sin\theta, 0 \right)$$

Il modulo quadro segue:

$$P_\mu P^\mu = M^2c^2 = \frac{(E_1 + E_2)^2}{c^2} - \left(\frac{E_2}{c}\right)^2 - \left(\frac{E_1}{c}\right)^2 - 2\frac{E_1E_2}{c^2}\cos\theta$$

$$M^2c^2 = 2\frac{E_2E_1}{c^2}(1 - \cos\theta)$$

Dunque dovendo essere $M > 2m$ segue la condizione:

$$M = \frac{1}{c^2}\sqrt{2E_1E_2(1 - \cos\theta)} > 2m$$

ovvero

$$E_1 > \frac{2m^2c^4}{E_2(1-\cos\theta)}$$

che è il valore di soglia richiesto.

Approfondimento: È interessante considerare i casi limite, quando $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, che corrispondono al problema unidimensionale di due fotoni che viaggiano sulla stessa retta, con lo stesso verso o con verso opposto rispettivamente. Per $\theta = 0$ il denominatore si annulla ed il problema non ha soluzione come è ovvio. Per $\theta = \pi$, semplificando il problema imponendo $E_1 = E_2$, ricaviamo la semplice condizione $E_1 > mc^2$ giustificata dal fatto che in questo caso semplificato il centro di massa del sistema è in quiete, ed i due fotoni identici collidono muovendosi l'uno contro l'altro.

Problema 5. (Sessione straordinaria 1-2-1994) Un nucleo in quiete di massa $M = 40$ GeV decade in un e^- ($m_e = 0.5$ MeV) di impulso 0.2 MeV/c lungo la direzione x e un neutrino ($m = 0$) di impulso 0.4 MeV/c lungo la direzione y. Determinare l'impulso del nucleo residuo nel riferimento in cui l'elettrone è in quiete.

Suggerimneto: Si ricavi l'impulso del nucleo residuo nel riferimento del laboratorio, utilizzando il principio di conservazione dell'impulso. Quindi si esegua una trasformazione di Lorentz sul 4-vettore energia impulso per ottenere il risultato nel riferimento solidale con l'elettrone.

Soluzione: Pochè il nucleo è originariamente in quiete, con energia totale Mc^2, sia l'energia E che l'impulso $\vec{P}$ del nucleo residuo si ottengono per conservazione del 4-vettore energia-impulso. Dopo il decadimento l'impulso totale deve essere ancora nullo:

$$\vec{P} + \vec{P}_e + \vec{P}_\nu = 0$$

e l'energia totale deve ancora essere uguale ad Mc^2:

$$E + E_e + E_\nu = Mc^2.$$

Ricaviamo subito le componenti dell'impulso $\vec{P}$ del nucleo residuo: $P_x = -P_e$, $P_y = -P_\nu$, $P_z = 0$, denotando con P_e, P_ν il modulo dell'impulso dell'elettrone e del neutrino rispettivamente (dati del problema). Occorre adesso trasformare il risultato dal riferimento del laboratorio a quello solidale con l'elettrone. La velocità dell'elettrone è (eq.(4) del §2.1)

$$\beta = \left(\frac{cP_e}{E_e}\right)$$

ed è diretta lungo l'asse x. Il fattore γ si può ottenere direttamente dall'eq.(3) come $\gamma = E_e/(m_e c^2)$, e la trasformazione di Lorentz per il 4-vettore $(E/c, P_x, P_y, P_z)$ ci da:

$$P'_x = \gamma\left(P_x - \beta\frac{E}{c}\right)$$

$$P'_y = P_y$$

Sostituendo le espressioni ricavate per P_x, P_y, β e γ otteniamo:

$$P'_x = -\frac{P_e}{m_e c^2}\left(E_e + E\right)$$

$$P'_y = -P_\nu$$

Infine, ricordando la relazione precedentemente ottenuta dal principio di conservazione dell'energia, sostituiamo $E_e + E = Mc^2 - E_\nu$, e ricordando che per il neutrino (m=0) l'energia è proporzionale all'impulso $E_\nu = cP_\nu$, ricaviamo

$$P'_x = -P_e\left(\frac{Mc^2 - P_\nu c}{m_e c^2}\right)$$

Inserendo i dati del problema:

$$P'_x = -(0.2)(4 \cdot 10^4 - 0.4)/(0.5)Mev/c = -16GeV/c$$

$$P'_y = -0.4Mev/c$$

Problema 6. (Sessione estiva 25-6-1992) Una particella di massa M e $\beta = 0.995$ decade come in figura in due particelle di massa $M/4$. Determinare l'angolo α.

Suggerimento: Considerare il problema nel riferimento del centro di massa, ed utilizzare le trasformazioni di Lorentz per ricavare l'angolo nel riferimento del laboratorio. L'angolo è individuato dalla conoscenza dell'impulso per componenti.

Soluzione: Nel riferimento del centro di massa la particella è inizialmente in quiete, e decade emettendo due particelle identiche che si muovono in direzione ortogonale alla direzione originale del moto nel laboratorio. Se così non fosse gli angoli formati dalle particelle emesse non sarebbero uguali nel riferimento del laboratorio. Per la conservazione dell'energia ognuna delle particelle emesse, nel riferimento del centro di massa, avrà una energia $E = Mc^2/2$ che è la metà dell'energia della particella iniziale. Dall'equazione di *mass shell* (eq.(8) del §2.2) segue l'impulso

$$P^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \left(\frac{M}{4}\right)^2 c^2$$

$$P^2 = \left(\frac{Mc}{2}\right)^2 - \left(\frac{M}{4}\right)^2 c^2 = \frac{3}{16}M^2c^2$$

$$P \equiv P_y = \frac{\sqrt{3}}{4}Mc$$

denotando con x la direzione originale del moto nel laboratorio, e con y la direzione ortogonale. Coincidendo quest'ultima con la direzione di moto, $P_x = 0$. Il riferimento del centro di massa si muove nella direzione x con velocità β (nota), percui nel riferimento del laboratorio le componenti dell'impulso per la particella emessa si ottengono tramite le trasformazioni di Lorentz:

$$P'_x = \gamma\left(P_x + \beta\frac{E}{c}\right)$$

$$P'_y = P_y.$$

Sostituendo le espressioni ricavate per E, P_x e P_y otteniamo:

$$P'_x = \gamma\beta\frac{Mc}{2}$$

$$P'_y = \frac{\sqrt{3}}{4}Mc$$

Infine, per l'angolo α segue

$$\tan\alpha = \frac{P'_y}{P'_x} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} = 0.269$$

Approfondimento: L'uso delle trasformazioni di Lorentz può essere evitato con il seguente ragionamento. La componente ortogonale dell'impulso $P_y = P'_y$ non cambia per trasformazioni di Lorentz e può essere calcolata nel riferimento del centro di massa, come discusso prima. La componente P'_x lungo la direzione iniziale del moto può essere invece calcolata direttamente nel riferimento del laboratorio utilizzando la conservazione dell'impulso, senza bisogno di utilizzare le trasformazioni di Lorentz. Infatti, per la simmetria del problema, imponendo la conservazione dell'impulso per componenti, ogni particella emessa deve avere una componente P'_x pari alla metà dell'impulso iniziale della particella di massa M. Essendo nota la velocità β, l'impulso iniziale segue dalla sua definizione eq.(2):

$$P_0 = \gamma\beta Mc$$

Dunque $P'_x = P_0/2 = \gamma\beta Mc/2$ che coincide con quanto ricavato sopra con le trasformazioni di Lorentz.

2.5 Problemi proposti

Problema 1. Un positrone e^+ di energia E collide con un elettrone e^- in quiete. Determinare il valore minimo di E affinchè dalla collisione si generi una coppia protone-antiprotone

$$e^+e^- \to p\bar{p}$$

Confrontare il risultato con l'analoga energia di soglia richiesta nel caso in cui l'elettrone ed il positrone inizialmente si muovono l'uno contro l'altro con la stessa energia E (il centro di massa è fermo). Si considerino note le masse dell'elettrone (0.51 MeV) e del protone (938 MeV).

Suggerimento: Calcolare, in entrambi i casi, la massa totale del sistema prima dell'urto utilizzando i dati del problema, quindi confrontare con la somma delle masse dei prodotti della reazione.

Problema 2. (Sessione straordinaria 1-2-1995) Una particella di massa $4m$ viene scagliata con velocità $v = \frac{3}{5}c$ contro una particella di massa m inizialmente a riposo. Dopo l'urto le due particelle formano uno stato legato instabile con vita media τ_0. Calcolare la vita media misurata nel riferimento del laboratorio.

Suggerimento: calcolare la velocità del centro di massa, poichè la vita media τ_0 si intende misurata appunto in tale riferimento solidale con la particella composta.

Problema 3. (Sessione strordinaria 7-2-1996) Una particella di massa m_0, che viaggia con velocità uniforme $\vec{v}$, assorbe simultaneamente due fotoni di energia E che giungono da parti opposte con angolo di incidenza θ (le traiettorie dei fotoni e della particella sono complanari, e quella della particella biseca l'angolo 2θ formato dai due fotoni). Determinare il valore di θ per il quale la particella non cambia la sua velocità in seguito all'assorbimento ed il valore della sua massa m dopo l'assorbimento.

Suggerimento: lavorare nel riferimento del centro di massa, e mostrare che per motivi di simmetria i due fotoni devono incidere ortogonalmente alla traiettoria della particella. L'angolo θ si ottiene quindi dalla trasformazione al riferimento del laboratorio.

Problema 4. (Sessione straordinaria 89/90) In un laboratorio collidono da direzione opposta due fasci di particelle, π^+ e π^-, che viaggiano lungo la stessa retta ma con velocità diverse e verso di percorrenza opposto. Un regolo di lunghezza L_0, orientato lungo la direzione del moto delle particelle, è in quiete nel laboratorio. Una misura di lunghezza di tale regolo effettuata da un osservatore solidale con il fascio di π^+ dà $L_+ = L_0/10$, e quella effettuata da un osservatore solidale con il fascio di π^- dà $L_- = L_0/2$. Verificare se è possibile l'annichilazione

$$\pi^+ + \pi^- \to p + \bar{p}$$

($M_\pi = 140$ MeV, $M_p = 940$ MeV).

Suggerimento: Ricavare prima separatamente le velocità dei fasci utilizzando i dati sulla contrazione del regolo; quindi determinare la massa della coppia π^+, π^- e confrontarla con la massa dei prodotti di reazione (vedi §2.3).

Problema 5. (Sessione straordinaria 89/90) Un fotone di energia E_γ incide su un elettrone a riposo. Il fotone viene deflesso di un angolo θ rispetto alla sua direzione iniziale. L'elettrone a sua volta va ad urtare con un positrone in quiete. Determinare la minima energia del fotone incidente affinchè possa avere luogo l'annichilazione $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ (Si considerino note le masse delle particelle).

3. Campo elettro-magnetico

3.1 Moto di una particella in un campo

Consideriamo il moto di una particella di carica e in un campo elettromagnetico descritto dal potenziale scalare ϕ e dal potenziale vettore $\vec{A}$. Alla lagrangiana della particella libera (eq.(1) del §2.1) occorre aggiungere il termine di interazione

$$L_{int} = -\frac{e}{c} A_\mu \frac{dx^\mu}{dt} \tag{1}$$

avendo definito il 4-vettore *potenziale*

$$A^\mu \equiv (\phi, \vec{A}) \qquad\qquad A_\mu \equiv (\phi, -\vec{A}) \tag{2}$$

La lagrangiana totale diventa

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\phi \tag{3}$$

Tale lagrangiana si giustifica *a posteriori* verificando che le equazioni di Lagrange riproducono le corrette equazioni del moto:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -e\vec{\nabla}\phi + \frac{e}{c}\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v})$$

Ricordando l'identità vettoriale (prodotto triplo)

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

otteniamo

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -e\vec{\nabla}\phi + \frac{e}{c}\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \frac{e}{c}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \tag{5}$$

Dalle equazioni (4) e (5) seguono le equazioni di Lagrange

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - e\vec{\nabla}\phi + \frac{e}{c}\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

che riproducono la nota *forza di Lorentz*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{H} \tag{6}$$

a condizione di porre

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi \tag{7a}$$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{7b}$$

Il 4-vettore potenziale A_μ non è definito univocamente: come è noto l'aggiunta di una derivata totale alla lagrangiana lascia le equazioni del moto invariate. Dunque poichè la trasformazione

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f(x) \qquad\qquad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{8}$$

aggiunge alla lagrangiana il termine

$$\frac{e}{c}(\partial_\mu f)\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{e}{c}\frac{df}{dt}$$

che è una derivata totale, tale trasformazione non cambia l'equazione (6) e non cambia i campi (7), per qualunque scelta di f. Ciò può essere verificato direttamente a partire dalle definizioni (7). La trasformazione (8) è detta *trasformazione di gauge.*

3.2 Tensore campo elettro-magnetico

Le equazioni dell'elettro-magnetismo assumono una forma particolarmente elegante utilizzando il formalismo covariante della teoria relativistica. Ciò non è un caso, ma è dovuto alla invarianza delle equazioni dell'elettro-magnetismo per trasformazioni di Lorentz. In effetti le equazioni dell'elettro-magnetismo erano note già prima della formulazione della teoria relativistica, e le loro proprietà anomale di trasformazione (non essendo invarianti per trasformazioni di Galilei) erano all'origine di non pochi problemi.

L'invarianza per trasformazioni di Lorentz implica che in forma covariante tutte le equazioni debbano poter essere scritte in termini di tensori, così da rimanere appunto invarianti in forma per trasformazioni da un riferimento inerziale ad un altro.

Definiamo il tensore campo elettro-magnetico

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad\qquad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{9}$$

Si tratta di un tensore anti-simmetrico $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, e dunque gli elementi diagonali sono nulli. Per $i \in \{1, 2, 3\}$ dalla definizione e confrontando con l'eq.(7a)

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \partial_i \phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^i = -E_i$$

Analogamente, confrontando con l'eq.(7b)

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\partial_1 A^2 + \partial_2 A^1 = -(\vec{\nabla} \times \vec{A})_3 = -H_3$$

Si ottiene così facilmente la seguente tabella

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ E_2 & H_3 & 0 & -H_2 \\ E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_2 & H_3 & 0 & -H_2 \\ -E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

In forma covariante le equazioni di Lagrange (6) si scrivono:

$$mc\frac{du^\mu}{ds} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}u_\nu \tag{11}$$

come può essere verificato sostituendo la definizione di F e del 4-vettore velocità (eq.(6) del §2.2), ricordando che $p^\mu = mcu^\mu$ e moltiplicando tutto per $\frac{ds}{dt}$. L'equazione (11) è palesemente invariante in forma per trasformazioni di Lorentz poichè compaiono solo grandezze tensoriali.

Per una generica trasformazione da un riferimento inerziale ad un altro che viaggia con velocità β rispetto al primo, il tensore $F^{\mu\nu}$ si trasforma (come tutti i tensori) tramite la matrice $\Lambda^\mu{}_\nu$ (eq.(14) del §1.4):

$$F^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\tau F'^{\sigma\tau}$$

Ad esempio:

$$E_1 = F^{10} = \Lambda^1{}_\sigma \Lambda^0{}_\tau F'^{\sigma\tau} = \gamma\beta\Lambda^0{}_\tau F'^{0\tau} + \gamma\Lambda^0{}_\tau F'^{1\tau} = \gamma\beta\gamma\beta F'^{01} + \gamma\gamma F'^{10}$$

dunque essendo $F'^{10} = -F'^{01} = E'_1$ e poichè $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$,

$$E_1 = E'_1\gamma^2(\beta^2 - 1) = E'_1$$

(la componenente di $\vec{E}$ lungo la direzione del moto è invariante). Analogamente:

$$E_2 = F^{20} = \Lambda^2{}_\sigma \Lambda^0{}_\tau F'^{\sigma\tau} = \Lambda^0{}_\tau F'^{2\tau} = \gamma F'^{20} + \gamma\beta F'^{21}$$

ed essendo $F'^{21} = H'_3$, $F'^{20} = E'_2$ otteniamo

$$E_2 = \gamma(E'_2 + \beta H'_3)$$

In questo modo si ottengono le formule di trasformazione:

$$E_1 = E'_1, \qquad E_2 = \gamma(E'_2 + \beta H'_3), \qquad E_3 = \gamma(E'_3 - \beta H'_2) \tag{12a}$$

$$H_1 = H_1', \qquad H_2 = \gamma(H_2' - \beta E_3'), \qquad H_3 = \gamma(H_3' + \beta E_2') \tag{12b}$$

Dalla forma covariante del tensore campo elettro-magnetico è facile individuare le 2 uniche combinazioni scalari che possono essere costruite a partire dai campi. Saturando opportunamente gli indici ricaviamo i seguenti scalari invarianti per trasformazioni di Lorentz:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2) \tag{13a}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}F_{\mu\nu}F_{\sigma\tau} = -8\vec{H}\cdot\vec{E} \tag{13b}$$

dove $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$ è il tensore completamente antisimmetrico e $\varepsilon^{0123} = 1$. Quest'ultimo invariante è più propriamente uno pseudo-scalare che cambia di segno per inversione degli assi.

Gli invarianti sono utili per prevedere le possibili trasformazioni dei campi in seguito a cambiamento di riferimento. In particolare se $\vec{H} = 0$ in un riferimento, il primo invariante è negativo ed il secondo è nullo. Di conseguenza in qualunque riferimento inerziale l'invarianza di tali combinazioni impone $|\vec{H}| < |\vec{E}|$ (poichè il primo invariante è negativo), e inoltre $\vec{H}$ ed $\vec{E}$ saranno ortogonali (poichè il secondo invariante è nullo). Considerazioni analoghe valgono nel caso dell'annullarsi del campo elettrico.

Viceversa, affinchè possa esistere un riferimento inerziale in cui $\vec{H} = 0$, i campi devono essere ortogonali, ed il campo magnetico deve avere intensità minore rispetto al campo elettrico.

3.3 Equazioni di Maxwell in forma covariante

La prima coppia delle equazioni di Maxwell, in forma covariante, coincide con l'identità

$$\partial_\mu F^{\nu\sigma} + \partial_\nu F^{\sigma\mu} + \partial_\sigma F^{\mu\nu} = 0 \qquad\qquad \mu \neq \nu \neq \sigma \tag{14}$$

che si dimostra immediatamente sostituendo la definizione del tensore $F^{\mu\nu}$ eq.(9), e invertendo l'ordine di derivazione opportunamente. Si tratta in tutto di 4 equazioni scalari, di cui 3 si riducono (scrivendo esplicitamente il tensore $F^{\mu\nu}$ in termini dei campi $\vec{H}$ e $\vec{E}$ tramite eq.(10)) alla equazione vettoriale:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

La rimanente equazione scalare in forma esplicita diventa

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$$

La seconda coppia delle equazioni di Maxwell,in forma covariante, è descritta dall'equazione:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = 4\pi J^\mu \tag{15}$$

ed anche in questo caso si tratta di 4 equazioni scalari. La corrente J^μ è definita come

$$J^\mu \equiv (\rho, \frac{1}{c}\vec{J}) = (\rho, \rho\frac{\vec{v}}{c}) \tag{16}$$

dove ρ rappresenta la densità. In forma covariante l'equazione di continuità assume la forma compatta

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{17}$$

Sostituendo la forma esplicita dei campi (10) in eq.(15) ricaviamo una equazione vettoriale

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

ed una equazione scalare

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho.$$

L'equazione (14) (prima coppia), essendo una identità, non aggiunge nulla che non sia già contenuto nella definizione del tensore $F^{\mu\nu}$.

L'equazione (15) invece (seconda coppia), pone delle nuove condizioni, e permette di determinare i campi fissate le condizioni al contorno (per esempio se è nota la distribuzione delle cariche). Riscriviamo l'eq.(15) in termini del potenziale

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \partial_\nu(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = 4\pi J^\mu$$

Invertendo l'ordine di derivazione, ricaviamo

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 4\pi J^\mu + \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu)$$

Possiamo quindi utilizzare la libertà nella scelta di gauge discussa nel §3.1 e, senza perdere in generalità, porre $\partial_\nu A^\nu = 0$. Infatti, nel caso in cui $\partial_\nu A^\nu = g(x) \neq 0$, si immagini di risolvere l'equazione

$$\partial_\mu \partial^\mu f(x) = -g(x)$$

e di effettuare la trasformazione di gauge

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu f(x)$$

la 4-divergenza del potenziale vettore diventa:

$$\partial_\mu A^\mu \to \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu f(x) = \partial_\mu A^\mu - g(x) = 0.$$

Tale scelta di gauge (gauge di Lorentz) ha il vantaggio di essere Lorentz invariante poichè la condizione imposta (l'annullarsi della 4-divergenza) è espressa in forma covariante e rappresenta l'annullarsi di una grandezza scalare. Fissato il gauge, le equazioni per il campo si riducono a:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 4\pi J^\mu$$

e si separano in 4 equazioni indipendenti per le componenti del potenziale A^μ.

Le equazioni ammettono una semplice soluzione in due casi particolari di grande interesse fisico: i) nel caso stazionario; ii) nel vuoto (lontano dalle cariche).

Nel caso stazionario le derivate rispetto al tempo si annullano, e la condizione di gauge si riduce a $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Tralasciando le derivate rispetto al tempo le equazioni per il campo si riducono a

$$\nabla^2 A^\mu = -4\pi J^\mu \tag{18}$$

e otteniamo l'equazione di Poisson per le 4 componenti del potenziale. La soluzione dell'equazione di Poisson per particolari distribuzioni delle cariche e delle correnti è normalmente discussa nei testi di Fisica Generale (elettrostatica e magnetostatica).

La propagazione invece delle onde elettromagnetiche nel vuoto (lontano dalle cariche) è retta dalle equazioni di Maxwell per $J^\mu = 0$. Ponendo $J^\mu = 0$ le equazioni per il potenziale diventano

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0$$

Si tratta dell'equazione d'onda di D'Alembert per ognuna delle 4 componenti del potenziale. Esplicitando le derivate:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) A^\mu = 0 \tag{19}$$

Le soluzioni rappresentano onde elettromagnetiche che si propagano nel vuoto con velocità c. La stessa equazione d'onda può essere interpretata come eq. di Schrödinger relativistica per particelle di massa nulla: associando come di consueto alle derivate gli operatori

$$\hat{H} \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \qquad\qquad \hat{\vec{p}} \to \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$$

l'equazione (19) diventa:

$$\left(\frac{1}{c^2} \hat{H}^2 - \hat{\vec{p}}^{\,2} \right) A^\mu(\vec{r}, t) = 0.$$

Se $A^\mu(\vec{r}, t)$ è autofunzione simultanea di $\hat{H}$ e $\hat{\vec{p}}$ con autovalori E, $\vec{p}$, l'equazione si riduce alla condizione di *mass shell* (eq.(8) del §2.2) per una particella relativistica di massa nulla (fotone)

$$\left(\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} \right) A^\mu(\vec{r}, t) = 0 \qquad \textit{ovvero} \qquad E^2 = \vec{p}^{\,2} c^2$$

Dunque le soluzioni di eq.(19) possono essere interpretate come funzioni d'onda relativistiche per i fotoni.

3.4 Onde elettromagnetiche ed effetto Doppler

In generale la funzione $A^\mu(\vec{r},t)$ può essere sviluppata in analisi di Fourier

$$A^\mu(\vec{r},t) = \int \frac{d^3\vec{k}d\omega}{(2\pi)^4} a^\mu(\vec{k},\omega) e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \tag{20}$$

come sovrapposizione di onde piane monocromatiche. L'invarianza per trasformazioni di Lorentz implica che la fase $(\vec{k}\vec{r}-\omega t)$ sia uno scalare, e dunque le variabili $\vec{k}$, ω devono costituire un 4-vettore k^μ (4-vettore d'onda)

$$k^\mu \equiv (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$$

In forma covariante la fase si scrive

$$\vec{k}\vec{r} - \omega t = -k^\mu x_\mu$$

che è appunto palesemente uno scalare Lorentz invariante.

Imponendo che il potenziale $A^\mu(\vec{r},t)$ sia soluzione della equazione d'onda (19) ricaviamo (sostituendo l'eq.(20) nell'eq.(19))

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) A^\mu(\vec{r},t) = \int \frac{d^3\vec{k}d\omega}{(2\pi)^4}\left(\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) a^\mu(\vec{k},\omega) e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = 0$$

che implica

$$\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \qquad \textit{ovvero} \qquad k^\mu k_\mu = 0 \tag{21}$$

(il 4-vettore d'onda è sul cono luce).

Qualunque soluzione dell'equazione d'onda (19) può essere scritta, tramite eq.(20), come sovrapposizione di onde piane monocromatiche della forma

$$a^\mu(k) e^{-ik^\mu x_\mu} \tag{22}$$

con il 4-vettore d'onda soggetto alla relazione di dispersione (21). Pertanto è sufficiente studiare una singola onda piana monocromatica (si dice onda piana poichè la fase è costante in qualunque piano ortogonale al vettore d'onda $\vec{k}$). Tale onda descrive la propagazione di fotoni con impulso $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ ed energia $E = \hbar\omega$. La relazione di dispersione (21) dunque coincide con l'equazione di *mass shell* per i fotoni discussa alla fine del paragrafo precedente, ed è una conseguenza delle equazioni di Maxwell. L'onda è detta monocromatica poichè la frequenza ω e la lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$ sono fissate (nel caso generale invece l'onda è una sovrapposizione di più onde monocromatiche).

Ricordando la scelta di gauge $\partial_\mu A^\mu = 0$, dall'eq.(20) ricaviamo una ulteriore condizione:

$$\partial_\mu A^\mu(\vec{r},t) = -i\int \frac{d^3\vec{k}d\omega}{(2\pi)^4}\left[k_\mu a^\mu(\vec{k},\omega)\right] e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = 0$$

ovvero

$$k_\mu a^\mu(k) = 0 \tag{23}$$

che limita il numero delle componenti indipendenti del 4-vettore a^μ. Possiamo infine determinare alcune proprietà dei campi elettrico e magnetico (tali proprietà sono indipendenti dalla scelta di gauge, poichè i campi devono essere gauge invarianti). Dalle definizioni (7) ricaviamo i campi per un'onda piana della forma (22):

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{a}(k) e^{-ik^\mu x_\mu} = i\vec{k} \times \vec{a}(k) e^{-ik^\mu x_\mu} \tag{24a}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi = i\left[\frac{\omega}{c}\vec{a}(k) - a^0(k)\vec{k}\right] e^{-ik^\mu x_\mu} \tag{24b}$$

dove $a^\mu \equiv (a^0, \vec{a})$. Utilizzando la relazione di dispersione (21) nella forma $|\vec{k}| = \omega/c$ e la condizione di gauge (23) vediamo subito che il prodotto scalare tra campo elettrico e vettore d'onda è nullo:

$$\left|\vec{E}\cdot\vec{k}\right| = \left|\frac{\omega}{c}\vec{a}\cdot\vec{k} - a^0\vec{k}^2\right| = \frac{\omega}{c}\left|\vec{a}\cdot\vec{k} - a^0\frac{\omega}{c}\right| = \frac{\omega}{c}\left|a^\mu k_\mu\right| = 0$$

Poichè a^μ dipende dalla scelta di gauge, conviene eliminarne la dipendenza nelle equazioni (24), in modo da ottenere una relazione tra i campi che sia gauge invariante. Ricavando $\vec{a}$ dalla equazione (24b) e sostituendo nella (24a) otteniamo

$$\vec{H} = i\vec{k} \times \left[\frac{c}{i\omega}\vec{E} + a^0\frac{c}{\omega}\vec{k}e^{-ik_\mu x^\mu}\right] = \left(\frac{c}{\omega}\vec{k}\right) \times \vec{E} = \hat{k} \times \vec{E}$$

dove il versore $\hat{k} = \vec{k}c/\omega = \vec{k}/|\vec{k}|$ è il versore della direzione di propagazione dell'onda. Avendo precedentemente dimostrato che $\vec{E}$ è ortogonale al versore $\hat{k}$, segue che i tre vettori $\vec{E}$, $\vec{H}$ e $\vec{k}$ costituiscono una terna ortogonale (onde trasversali), e che $|\vec{E}| = |\vec{H}|$. Dunque entrambi gli invarianti (13) sono nulli.

Il 4-vettore d'onda k^μ determina la frequenza e la direzione di propagazione dell'onda. Passando da un riferimento inerziale ad un altro, k^μ si trasforma come tutti i 4-vettori in accordo alle trasformazioni di Lorentz, ed il nuovo 4-vettore d'onda k'^μ determina la frequenza e la direzione di propagazione dell'onda nel nuovo riferimento.

Se il nuovo riferimento viaggia lungo l'asse x con verso positivo, la trasformazione del 4-vettore $k^\mu \equiv (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$ è la seguente:

$$\frac{\omega}{c} = \gamma\left(\frac{\omega'}{c} + \beta k'_x\right) \tag{25a}$$

$$k_x = \gamma\left(k'_x + \beta\frac{\omega'}{c}\right) \tag{25b}$$

con $k'_y = k_y$ e $k'_z = k_z$. Denotando con θ' l'angolo formato tra la direzione di propagazione e l'asse x nel nuovo riferimento, abbiamo

$$k'_x = |\vec{k}'|\cos\theta' = \frac{\omega'}{c}\cos\theta'$$

e sostituendo in eq.(25a) ricaviamo

$$\frac{\omega}{c} = \gamma\left(\frac{\omega'}{c} + \beta\frac{\omega'}{c}\cos\theta'\right) = \frac{\omega'}{c}\gamma\left(1 + \beta\cos\theta'\right)$$

Infine dividendo per ω'

$$\frac{\omega}{\omega'} = \gamma\left(1 + \beta\cos\theta'\right) \tag{26}$$

La variazione della frequenza può essere effettivamente misurata (effetto Doppler) e dipende dall'angolo. Per $\theta' = 0$ abbiamo la consueta espressione per l'effetto Doppler longitudinale:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{27}$$

Se invece è noto l'angolo θ tra la direzione di propagazione e l'asse x nel vecchio riferimento (in quiete), conviene usare la trasformazione inversa della (25a):

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \beta k_x\right)$$

ed essendo

$$k_x = |\vec{k}|\cos\theta = \frac{\omega}{c}\cos\theta$$

otteniamo sostituendo:

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \beta\frac{\omega}{c}\cos\theta\right) = \frac{\omega}{c}\gamma\left(1 - \beta\cos\theta\right)$$

Ovvero, dividendo per ω

$$\frac{\omega'}{\omega} = \gamma\left(1 - \beta\cos\theta\right) \tag{28}$$

È importante comprendere che gli angoli θ e θ' sono diversi, e che quindi le equazioni (26) e (28) sono equivalenti anche se formalmente diverse. Nelle applicazioni la scelta dell'equazione da utilizzare è determinata dai dati noti. La relazione tra gli angoli θ e θ' può essere ricavata dal confronto tra le eq. (26) e (28), oppure direttamente dividendo l'eq.(25b) per l'eq.(25a) e ricordando che $\cos\theta = k_x/|\vec{k}| = ck_x/\omega$:

$$\cos\theta = \frac{ck_x}{\omega} = \frac{k'_x + \beta\frac{\omega'}{c}}{\frac{\omega'}{c} + \beta k'_x} = \frac{\frac{ck'_x}{\omega'} + \beta}{1 + \beta\frac{ck'_x}{\omega'}}$$

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'} \tag{28}$$

3.5 Problemi svolti

Problema 1. In un riferimento inerziale è presente un campo elettro-magnetico uniforme e costante. Sapendo che campo elettrico e campo magnetico sono ortogonali, e che

$$\left|\vec{E}\right| > \left|\vec{H}\right|$$

dire se esistono uno o più riferimenti inerziali in cui almeno uno dei due campi è nullo, e deteminarne la velocità.

Suggerimento: Utilizzare gli invarianti (13) e le trasformazioni (12).

Soluzione: Essendo i campi ortogonali segue che $\vec{E} \cdot \vec{H} = 0$; ed essendo maggiore l'intensità del campo elettrico abbiamo $E^2 - H^2 > 0$. L'annullarsi del primo di questi invarianti è condizione *necessaria* affinchè esista un riferimento in cui almeno uno dei campi sia nullo (infatti l'invariante si annullerebbe in tal caso, ed essendo invariante deve essere nullo in qualunque riferimento). Essendo il secondo invariante positivo, è ammissibile l'annullarsi del campo magnetico (il campo elettrico non può annullarsi in alcun riferimento poichè altrimenti il secondo invariante sarebbe negativo). Dobbiamo determinare uno o più riferimenti in cui si annulla il campo magnetico (ciò è compatibile con il valore degli invarianti). Consideriamo un riferimento inerziale in moto con velocità $\vec{v}$ ed orientiamo gli assi cartesiani in modo da far coincidere l'asse x con la direzione del moto. Dalle trasformazioni (12b) opportunamente invertite

$$H'_x = H_x, \qquad H'_y = \gamma(H_y + \beta E_z), \qquad H'_z = \gamma(H_z - \beta E_y)$$

Imponiamo che tutte le componenti del nuovo vettore campo magnetico siano nulle. In particolare vediamo subito che $H_x = H'_x = 0$ e dunque la direzione del moto (asse x) è ortogonale al campo magnetico (la proiezione è nulla). L'annullarsi delle altre componenti ci dà

$$H_y = -\beta E_z \qquad\qquad H_z = \beta E_y$$

ovvero, ricordando che $\vec{v} \equiv (v_x, 0, 0)$

$$H_y = \frac{1}{c}(v_z E_x - v_x E_z) \qquad\qquad H_z = \frac{1}{c}(v_x E_y - v_y E_x)$$

(con $v_y = v_z = 0$ nel riferimento prescelto). In definitiva possiamo scrivere tali relazioni in forma vettoriale

$$\vec{H} = \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{E}$$

cioè il campo magnetico è ortogonale alla direzione del moto. Esistono dunque infiniti riferimenti inerziali in cui il campo magnetico è nullo: il generico riferimento si muove in direzione ortogonale al campo magnetico con velocità fissata dalla relazione

$$H = \frac{1}{c}vE\sin\theta = \beta E\sin\theta$$

essendo θ l'angolo formato tra la direzione del moto ed il campo elettrico. Ovvero

$$\beta = \frac{H}{E \sin\theta}$$

Approfondimento: Non tutte le direzioni ortogonali al campo magnetico sono equivalenti. Orientando gli assi in modo da avere l'asse z rivolto lungo la direzione del campo magnetico, il campo elettrico si troverà nel piano xy ortogonale al campo magnetico. Il generico riferimento in cui il campo magnetico è nullo si muove con una velocità $\vec{v}$ pure ortogonale all'asse z. Nel piano xy la velocità $\vec{v}$ ed il campo $\vec{E}$ formano l'angolo θ. Se l'angolo θ è piccolo il modulo della velocità richiesta cresce enormemente e supera la velocità della luce. Dunque non tutte le direzioni permettono di conseguire il risultato richiesto. Imponendo che $\beta < 1$ abbiamo

$$\sin\theta > \frac{H}{E} \qquad \textit{ovvero} \qquad \theta > \arcsin\frac{H}{E}$$

Inoltre il modulo della velocità richiesta è minimo per $\theta = \pi/2$ quando cioè la direzione del moto è ortogonale al campo elettrico.

Problema 2. In un riferimento inerziale O il campo elettrico $\vec{E}$ ed il campo magnetico $\vec{H}$ sono uniformi e costanti, con modulo uguale $|\vec{E}| = |\vec{H}|$, e formano un angolo di $\pi/4$. determinare la velocità del riferimento inerziale O', in moto lungo la direzione ortogonale ad entrambi i campi, in cui $\vec{E}$ ed $\vec{H}$ coincidono. Dire se esistono altri riferimenti in cui si verifica la stessa circostanza.

Suggerimento: Orientare l'asse x lungo la direzione ortogonale ai campi ed utilizzare le trasformazioni (12), imponendo che i nuovi campi coincidano.

Soluzione: Perchè esista un riferimento in cui i campi coincidono l'invariante $E^2 - H^2$ deve annullarsi, cosa che è verificata nel presente caso. Scegliamo l'asse x in direzione ortogonale ai campi e l'asse y parallelo al campo elettrico. Con tale scelta degli assi i campi hanno le seguenti componenti:

$$\vec{H} \equiv (0, \frac{\sqrt{2}}{2}E, \frac{\sqrt{2}}{2}E) \qquad \vec{E} \equiv (0, E, 0) \qquad |\vec{E}| = |\vec{H}| = E$$

Le trasformazioni (12), opportunamente invertite, danno

$$E'_y = \gamma\,(E_y - \beta E_z) = \gamma\left(E - \beta\frac{\sqrt{2}}{2}E\right) = E\gamma\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta\right)$$

$$H'_y = \gamma\,(H_y + \beta E_z) = \gamma\frac{\sqrt{2}}{2}E$$

$$E'_z = \gamma\,(E_z + \beta H_y) = \gamma\beta\frac{\sqrt{2}}{2}E$$

$$H'_z = \gamma\left(H_z - \beta E_y\right) = \gamma\left(\frac{\sqrt{2}}{2}E - \beta E\right) = E\gamma\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \beta\right)$$

Imponendo che i campi coincidano per componenti, da $H'_y = E'_y$ otteniamo:

$$E\gamma\frac{\sqrt{2}}{2} = E\gamma\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta\right) \qquad \rightarrow \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta \qquad \rightarrow \qquad \beta = \sqrt{2} - 1$$

Da $H'_z = E'_z$ otteniamo

$$E\gamma\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \beta\right) = \gamma\beta\frac{\sqrt{2}}{2}E \qquad \rightarrow \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta = \beta\frac{\sqrt{2}}{2}E \qquad \rightarrow \qquad \beta = \sqrt{2} - 1$$

Le due condizioni coincidono poichè l'invariante $E^2 - H^2 = 0$ impone che i vettori siano sempre uguali in modulo e quindi, essendo nulla la componente x di entrambi, l'uguaglianza della componente y implica l'uguaglianza della componente z.

Il riferimento inerziale in cui i campi coincidono non è unico, come si deduce dal seguente ragionamento. Nel riferimento O' orientiamo gli assi in modo da sovrapporre l'asse x con la direzione dei due vettori coincidenti $\vec{E}' = \vec{H}'$. In qualunque riferimento inerziale che si muove rispetto ad O' lungo la direzione del nuovo asse x (nella direzione comune dei campi) i campi sono invariati e dunque ancora coincidenti. Infatti con la nuova scelta degli assi $H'_y = H'_z = E'_y = E'_z = 0$ e $H'_x = E'_x$, e dalle trasformazioni (12) è evidente l'asserto. In altre parole, poichè i campi non cambiano quando la velocità è ad essi parallela, essendo coincidenti in O' lo saranno anche in tutti i riferimenti che si muovono rispetto ad O' con velocità parallela ai campi ed arbitraria in modulo.

Problema 3. Un fascio di ioni He^+ viene attraversato da un'onda piana monocromatica di frequenza $\hbar\omega = 4\sqrt{\frac{2}{3}}$ Hartree (1Hartree=$\frac{e^2}{a_0}$ dove $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$). Nel riferimento del laboratorio la direzione di propagazione dell'onda forma un angolo $\alpha = \pi/6$ con la direzione del fascio. Determinare la velocità minima e massima degli ioni affinchè la radiazione non possa ulteriormente ionizzarli.

Suggerimento: Si confronti l'energia di ionizzazione per uno ione He^+ in quiete ($E_i = \frac{2e^2}{a_0}$) con la frequenza dell'onda $\hbar\omega'$ (energia dei fotoni) misurata nel riferimento solidale con lo ione. Essendo noto l'angolo nel riferimento del laboratorio si usi la formula (28).

Soluzione: L'energia E' dei fotoni nel riferimento solidale con lo ione si ottiene dalla formula (28), essendo $E = \hbar\omega$:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\omega'}{\omega} = \gamma(1 - \beta\cos\alpha)$$

avendo indicato con β la velocità degli ioni. Affinchè l'energia E' non sia sufficiente ad ionizzare ulteriormente lo ione deve essere

$$E' < E_i = \frac{2e^2}{a_0} = 2\,Hartree$$

avendo considerato lo ione come atomo idrogenoide con carica $z = 2$. Dunque

$$E_i > E' = E\gamma(1 - \beta \cos \alpha)$$

sostituendo i dati del problema

$$2 > 4\sqrt{\frac{2}{3}}\gamma \left(1 - \beta \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

e quadrando

$$(1 - \beta^2) > \frac{8}{3}\left(1 - \beta \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Infine, risolvendo rispetto a β otteniamo

$$3\beta^2 - 8\frac{\sqrt{3}}{3}\beta + \frac{5}{3} < 0$$

ovvero

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < \beta < \frac{5}{3}\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Per β compreso tra $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$ e $\frac{5}{3}\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.962$ l'energia dei fotoni E' è inferiore a quella richiesta per ionizzare ulteriormente lo ione.

Approfondimento: È istruttivo generalizzare il risultato al caso di un angolo α generico: l'energia dei fotoni nel riferimento solidale con gli ioni è data dalla relazione

$$\frac{E'}{E} = \frac{\omega'}{\omega} = \gamma(1 - \beta \cos \alpha) = \frac{(1 - \beta \cos \alpha)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Questa espressione è riportata qualitativamente nella figura.

Per $\alpha \neq 0$ il punto $\beta = 1$ è un asintoto verticale e la funzione diverge per $\beta \to 1$. Solo nel caso $\alpha = 0$ (effetto Doppler longitudinale) la funzione è continua in $\beta = 1$ (diverge la derivata). Per $\beta \to 0$ sviluppando in serie al secondo ordine in β

$$\frac{E'}{E} \approx (1 - \beta \cos \alpha)(1 + \beta^2/2) \approx 1 - \beta \cos \alpha + \frac{\beta^2}{2}$$

Dunque per piccoli β il comportamento è lineare e decrescente se $\cos\alpha > 0$ ($\alpha < \frac{\pi}{2}$); crescente per $\cos\alpha < 0$ ($\alpha > \frac{\pi}{2}$). Per il caso particolare $\alpha = \frac{\pi}{2}$ il termine lineare si annulla, e l'effetto è del secondo ordine in β (effetto Doppler trasversale), e quindi osservabile solo a velocità maggiori rispetto a quelle richieste per l'effetto longitudinale. Per $\alpha < \frac{\pi}{2}$ il termine lineare è negativo, e pertanto il rapporto E'/E inizialmente *decresce*, per poi crescere per valori più grandi di β andando a divergere per $\beta \to 1$. È dunque evidente che, per angoli acuti nel riferimento del laboratorio, l'energia E' ha un minimo per un opportuno valore di β. L'effetto Doppler in tal caso non è monotono.

Problema 4. (sessione estiva 29-5-1995) Un nucleo in quiete si trova in un suo stato eccitato di energia M^*c^2. Ad un certo istante il nucleo decade nel suo stato fondamentale emettendo un fotone γ di energia E. Determinare l'energia E' di un altro fotone γ' affinchè questo, collidendo con un nucleo identico al precedente, in quiete e nel suo stato fondamentale, possa eccitarlo esattamente nello stato di energia M^*c^2.

Suggerimento: Considerare il processo inverso in cui il nucleo ed il fotone γ collidono nel riferimento del centro di massa producendo un nucleo eccitato di massa M^* in quiete (i valori di impulso ed energia si ottengono immediatamente per inversione temporale). Nel riferimento solidale con il nucleo prima dell'urto, il processo è esattamente quello proposto nella seconda parte del testo. Ottenere quindi il risultato richiesto con una trasformazione di Lorentz.

Soluzione: Per inversione temporale il nucleo nel suo stato fondamentale, muovendosi contro il fotone γ con impulso $P = E/c$ uguale e opposto a quello del fotone, assorbe il fotone eccitandosi nello stato di massa M^*. Il nucleo eccitato è in quiete per conservazione dell'impulso. La velocità del nucleo incidente si ottiene dalla sua energia E_n. Per conservazione della energia nel processo

$$E_n = M^*c^2 - E$$

dunque

$$\beta = \frac{cP}{E_n} = \frac{E}{M^*c^2 - E}$$

Nel riferimento solidale con il nucleo incidente (che si muove con velocità β) il processo assume il seguente aspetto: il nucleo in quiete nel suo stato fondamentale viene raggiunto da un fotone γ' producendo un nucleo eccitato che rincula con velocità $-\beta$. Trattandosi proprio del processo discusso nel testo, l'energia del fotone γ' si ottiene da quella del fotone γ per trasformazione di Lorentz (effetto Doppler longitudinale). Poichè il nuovo riferimento si muove contro il fotone con velocità β l'energia del fotone è vista aumentata secondo la formula inversa della (27):

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

e sostituendo l'espressione per β otteniamo

$$E' = E\sqrt{\frac{(M^*c^2 - E) + E}{(M^*c^2 - E) - E}} = \frac{E}{\sqrt{1 - \frac{2E}{M^*c^2}}}$$

Problema 5. (Sessione autunnale 3-10-95) Una sfera metallica perfettamente riflettente si muove con velocità $v = 0.5c$ verso una sorgente luminosa monocromatica S che emette alla frequenza ω. La luce riflessa dalla sfera è rivelata da un osservatore solidale con S, posto ad una distanza d dalla direzione del moto della sfera. Determinare la posizione della sfera rispetto all'osservatore nel momento in cui questo misura una frequenza 2ω.

Suggerimento: Applicare la formula (27) tra sorgente e sfera, e la formula (28) tra sfera ed osservatore.

Soluzione: Denotiamo con ω' la frequenza della radiazione emessa dalla sorgente misurata in un riferimento solidale con la sfera. In tale riferimento la radiazione riflessa avrà ancora frequenza ω'. Denotiamo quindi con ω'' la frequenza della luce riflessa misurata dall'osservatore. Utilizzando la formula per l'effetto Doppler longitudinale (27), si ricava la frequenza ω' (sorgente e sfera sono in avvicinamento)

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Denotando θ l'angolo tra la direzione del moto ed il segmento PO che congiunge la sfera e l'osservatore (ad un dato istante, nel riferimento solidale con l'osservatore), utilizziamo la formula (28) nella forma:

$$\frac{\omega'}{\omega''} = \gamma(1 - \beta\cos\theta)$$

Nel caso sorgano dubbi sulla scelta del verso della velocità o sulla scelta dell'angolo, conviene sempre ricorrere alle trasformazioni di Lorentz per il 4-vettore d'onda. Nel nostro caso, orientando l'asse x lungo la direzione del moto della sfera, le trasformazioni di Lorentz danno

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma\left(\frac{\omega''}{c} - \beta k''_x\right)$$

dove il doppio apice indica grandezze misurate nel riferimento solidale con l'osservatore (in quiete) mentre con un solo apice rappresentiamo grandezze misurate nel riferimento solidale con la sfera (che si muove con velocità β nel verso positivo dell'asse x). Essendo $k''_x = \frac{\omega''}{c}\cos\theta$ ricaviamo

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma\frac{\omega''}{c}(1 - \beta\cos\theta)$$

ovvero

$$\frac{\omega'}{\omega''} = \gamma(1 - \beta\cos\theta)$$

coincidente appunto con l'eq.(28). Infine, combinando questa trasformazione con la trasformazione longitudinale precedentemente ricavata, otteniamo:

$$\omega'' = \frac{\omega'}{\gamma(1-\beta\cos\theta)} = \omega\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{(1-\beta\cos\theta)} = \omega\frac{1+\beta}{1-\beta\cos\theta}$$

Imponendo che questa frequenza sia 2ω ricaviamo una condizione per l'angolo:

$$\frac{1+\beta}{1-\beta\cos\theta} = 2$$

ovvero

$$\cos\theta = \frac{1-\beta}{2\beta}$$

Ricordando che $\beta = 0.5$ ricaviamo $\cos\theta = 1/2$ ossia $\theta = \pi/3$. Per individuare la posizione della sfera nel momento in cui viene rivelata da O una radiazione di frequenza 2ω, occorre considerare che nel tempo impiegato dalla radiazione a raggiungere l'osservatore la sfera, muovendosi a velocità $\beta = c/2$ percorre uno spazio uguale alla metà del segmento OP (percorso nello stesso tempo dalla luce). Percui essendo $\theta = \pi/3$ la sfera si troverà esattamente nel punto A (proiezione ortogonale di O sulla traiettoria della sfera PS).

3.6 Problemi proposti

Problema 1. (sessione autunnale 90/91) Una sorgente S, avvicinandosi all'origine lungo l'asse y con velocità costante V, emette un segnale luminoso di frequenza ν_S nella direzione α come in figura. Il segnale, riflettendosi sullo specchio SS in quiete raggiunge un rivelatore R che si allontana lungo l'asse x alla stessa velocità V. Determinare la frequenza ν_R del segnale misurata da R e, se esiste, l'angolo α per cui $\nu_R = \nu_S$.

Suggerimento: Procedere in maniera analoga al problema 5 del paragrafo precedente.

Problema 2. (sessione autunnale, settembre 1991) Due sorgenti A e B in moto relativo lungo l'asse x emettono onde piane monocromatiche. La sorgente A emette il segnale di frequenza $f1$ lungo l'asse x e la sorgente B emette il segnale di frequenza $f2$ lungo l'asse

y. L'osservatore O si muove lungo l'asse x con velocità $v1$ rispetto ad A e $v2$ rispetto a B ed osserva che le frequenze dei due segnali da lui misurate sono uguali.

1) determinare $v2$ in funzione di $v1$ e del rapporto $f2/f1$;
2) esistono limitazioni sul rapporto $f2/f1$ affinchè ciò accada?
3) è possibile fissare il segno di $v2$ imponendo che O osservi la direzione dell'onda emessa da B ad un angolo determinato?