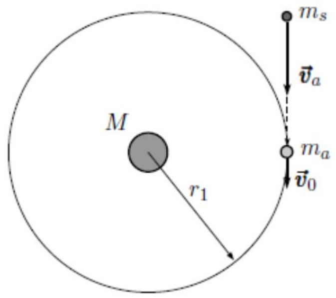
Dottorato di ricerca in Fisica — Università di Catania Prova scritta di ammissione XLI ciclo — 16/01/2026

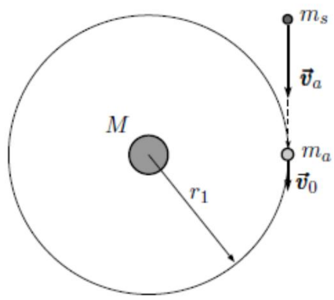
Nota per i candidati: lasciare indicati tutti i passaggi effettuati
Note to the candidates: write down all the steps followed.

Compito I (Test I)

(Italiano) Esercizio I
Un satellite di massa m_s=1000 kg ruota intorno alla Terra in un'orbita circolare di raggio $r_1=1.5 \cdot 10^4$ km (rispetto al centro della Terra, vedi figura). Per il satellite, determinare:
a) modulo v_0 della sua velocità e modulo, direzione e verso (li si specifichi rispetto alla figura) del suo momento angolare rispetto al centro della Terra.
Ad un certo istante un asteroide, di massa m_a=200 kg, che si muove nel piano dell'orbita del satellite, lo colpisce in direzione parallela alla sua velocità (come mostrato in figura). Al momento dell'impatto con il satellite l'asteroide ha una velocità $v_a=10v_0$. Sapendo che la collisione tra i due è istantanea e perfettamente anelastica, determinare:
b) la velocità v del corpo (satellite + asteroide) subito dopo la collisione e l'energia che viene dissipata nell'urto.
[costante di gravitazione universale=$6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2; massa della Terra=$5.97 \cdot 10^{24}$ kg]



(English) Exercise I
A satellite of mass m_s=1000 kg revolves around the Earth in a circular orbit of radius $r_1=1.5\times10^4$ km (see figure). For the satellite, determine:
a) the magnitude v_0 of its velocity and the magnitude, direction, and sense (to be specified with respect to the figure) of its angular momentum with respect to the center of the Earth.
At a certain instant, an asteroid of mass m_a=200 kg, moving in the plane of the satellite's orbit, strikes it in a direction parallel to the satellite's velocity (as shown in the figure). At the moment of impact with the satellite, the asteroid has a velocity $v_a=10v_0$. Knowing that the collision between the two bodies is instantaneous and perfectly inelastic, determine:
b) the velocity v of the combined body (satellite + asteroid) immediately after the collision and the energy dissipated in the impact.
[gravitational constant=$6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2; Earth mass=$5.97 \cdot 10^{24}$ kg]



(Italiano) Esercizio II

Una macchina termica reversibile utilizza n=2.5 moli di un gas perfetto biatomico che esegue il ciclo costituito dalle 3 seguenti trasformazioni: 1) dallo stato iniziale (p_1=15.0 atm e T_1=100 °C) il gas viene fatto espandere isotermicamente fino a che il suo volume si porta a $V_2=4V_1$; 2) seguendo una trasformazione isobara il gas viene portato sull'adiabatica passante per lo stato iniziale; 3) lungo tale adiabatica il gas viene infine riportato allo stato iniziale.

a) Si disegni il ciclo in un piano P-V;
b) Si calcoli il lavoro L e il calore Q scambiati dal gas in un ciclo;
c) Si calcoli il rendimento η del ciclo;
d) Si calcoli la variazione di entropia $\Delta S_{2,3}$ lungo la trasformazione isobara.
[costante di Boltzmann=$1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K; costante dei gas ideali=8.314 J/mol K]

(English) Exercise II

A reversible heat engine uses n=2.5 moles of a diatomic ideal gas that undergoes a cycle consisting of the following three transformations: 1) Starting from the initial state (p_1=15.0 atm and T_1= 100 °C), the gas is made to expand isothermally until its volume reaches $V_2=4V_1$; 2) Following an isobaric transformation, the gas is brought onto the adiabat that passes through the initial state; 3) Along this adiabat, the gas is finally returned to the initial state.

a) Draw the cycle in a P−V diagram;
b) Calculate the work L done by the gas and the heat Q exchanged by the gas over one cycle;
c) Calculate the efficiency η of the cycle;
d) Calculate the change in entropy $\Delta S_{2,3}$ along the isobaric transformation.
[Boltzmann constant=$1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K; ideal gas constant=8.314 J/mol K]

(Italiano) Esercizio III

Si consideri un solenoide ideale molto lungo, di raggio a, con n spire per unità di lunghezza, percorso da una corrente dipendente dal tempo

$$I(t) = I_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \qquad t \geq 0,$$

con I(t)=0 per t < 0. Il solenoide è immerso nel vuoto. Trascurando gli effetti di radiazione, il campo magnetico generato può essere scritto come

$$\vec{B}(t) = \begin{cases} \mu_0 n I(t)\,\hat{z}, & r < a, \\ 0, & r > a, \end{cases}$$

dove r è la distanza dall'asse del solenoide e $\hat{z}$ è la direzione dell'asse.

1) Usando la legge di Faraday, determinare il campo elettrico indotto $\vec{E}(r,t)$ per t > 0 nei due casi:
(a) r<a,
(b) r>a.
Si assuma simmetria cilindrica e si scriva $\vec{E}(r,t)$ nella forma $E_\varphi(r,t)\hat{\varphi}$.
2) Si consideri ora una spira conduttrice circolare di raggio R, con R>a, coassiale col solenoide. Calcolare la forza elettromotrice indotta ε(t) nella spira per t>0.

(English) Exercise III
Consider an ideal very long solenoid of radius a, with n turns per unit length, carrying a time-dependent current

$$I(t) = I_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \qquad t \geq 0,$$

with I(t)=0 for t<0. The solenoid is immersed in vacuum. Neglecting radiation effects, the generated magnetic field can be written as

$$\vec{B}(t) = \begin{cases} \mu_0 n I(t)\,\hat{z}, & r < a, \\ 0, & r > a, \end{cases}$$

where r is the distance from the axis of the solenoid and $\hat{z}$ is the direction of the axis.
1) Using Faraday's law, determine the induced electric field $\vec{E}(r,t)$ for t>0 in the two cases:
(a) r<a,
(b) r>a.
Assume cylindrical symmetry and write $\vec{E}(r,t)$ in the form $E_\varphi(r,t)\hat{\varphi}$.
2) Now consider a circular conducting loop of radius R, with R>a, coaxial with the solenoid. Calculate the induced electromotive force ε(t) in the loop for t>0.

(Italiano) Esercizio IV
Un fascio di elettroni viene accelerato da una differenza di potenziale *V*=150 V, e incide su un cristallo di nichel.

1. Calcolare la lunghezza d'onda di De Broglie degli elettroni.
2. Determinare l'angolo di diffrazione del primo massimo, sapendo che la distanza interplanare del cristallo è *d*=0.091 nm.

(costante di Planck $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s, massa dell'elettrone $m = 9.11 \times 10^{-31}$ Kg, carica dell'elettrone $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C)

(English) Exercise IV
A beam of electrons is accelerated through a potential difference of *V* = 150 V, and is directed onto a nickel crystal.

1. Calculate the de Broglie wavelength of the electrons.
2. Determine the diffraction angle of the first maximum, given that the interplanar spacing of the crystal is *d* = 0.091 nm.

(Planck's constant $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s, electron mass $m = 9.11 \times 10^{-31}$ Kg, electron charge $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C)

(Italiano) Esercizio V
Si consideri l'oscillatore armonico unidimensionale quantistico con Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2,$$

e autofunzioni $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ con autovalori

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \tfrac{1}{2}\right).$$

Al tempo t = 0 il sistema si trova nello stato

$$\psi(x, 0) = \mathcal{N}\left(\varphi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1(x)\right).$$

1. Normalizzare lo stato ψ (x, 0).
2. Calcolare il valore medio dell'energia ⟨H⟩ nello stato iniziale.
3. Scrivere lo stato ψ (x, t) per t > 0.
4. Calcolare la probabilità $P_0(t)$ di misurare l'energia E_0 al tempo t. Nel caso in cui questa risulti indipendente dal tempo, spiegare il motivo fisico.

(English) Exercise V
Consider the one-dimensional quantum harmonic oscillator with Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2,$$

and eigenfunctions $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ with eigenvalues

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \tfrac{1}{2}\right).$$

At time t=0 the system is in the state

$$\psi(x, 0) = \mathcal{N}\left(\varphi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1(x)\right).$$

1) Normalize the state ψ(x,0).
2) Calculate the expectation value of the energy ⟨H⟩ in the initial state.
3) Write the state ψ(x,t) for t>0.
4) Calculate the probability P0(t) of measuring the energy E_0 at time t. If this probability turns out to be time-independent, explain the physical reason.

Dottorato di ricerca in Fisica — Università di Catania Prova scritta di ammissione XLI ciclo — 16/01/2026

Nota per i candidati: lasciare indicati tutti i passaggi effettuati
Note to the candidates: write down all the steps followed.

Compito II (Test II)

(Italiano) Esercizio I

Una sfera omogenea di massa M=30.0 kg è posta in quiete su un piano orizzontale. Ad un certo istante la sfera viene colpita orizzontalmente, lungo la direttrice che passa per il suo centro, da un corpo puntiforme di massa m=200 g che viaggia ad una velocità v_0=100 m/s. L'urto tra i due è perfettamente elastico e la sfera, durante e dopo l'urto, non slitta sul piano.
Determinare i valori che, subito dopo l'urto, avranno le velocità:
a) v_1 del corpo puntiforme;
b) v_{cm} del centro di massa della sfera.
[momento di inerzia di una sfera omogenea di massa M e raggio R rispetto ad un asse passante per il suo centro=(2/5)MR^2]

(English) Exercise I

A homogeneous sphere of mass M=30.0 kg is initially at rest on a horizontal plane. At a certain instant, the sphere is struck horizontally, along the line passing through its center, by a point-like body of mass m=200 g moving at a speed v_0=100 m/s. The collision between the two bodies is perfectly elastic, and the sphere, both during and after the collision, does not slip on the plane.
Determine the values of the velocities immediately after the collision:
a) v_1 of the point-like body;
b) v_{cm} of the center of mass of the sphere.
[moment of inertia of homogeneous sphere with mass M and radius R with respect to an axis through its center=(2/5)MR^2]

(Italiano) Esercizio II

Una mole di un gas perfetto biatomico compie una trasformazione ciclica reversibile eseguendo i seguenti processi: 1) una compressione isoterma (da A a B) che avviene mantenendo il gas a contatto con un bagno termico alla temperatura T_A; 2) si pone, quindi, il gas in contatto termico con un bagno termico alla temperatura T_C mantenendo il volume costante (da B a C) fino al raggiungimento dell'equilibrio; 3) segue una espansione adiabatica (da C ad A) che riporta il gas nello stato iniziale. Sono note le temperature T_A=T_B=250 K e T_C=500 K, e si sa che V_B=V_C.
a) Disegnare il ciclo in un piano di Clapeyron.
b) Calcolare il rendimento del ciclo.
c) Calcolare la variazione di entropia del gas nella trasformazione che, passando per B, lo porta da A a C.
d) Dopo un ciclo, quanto vale la variazione di entropia dell'universo (cioè del gas insieme ai due bagni termici)?
[costante di Boltzmann=$1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K; costante dei gas ideali=8.314 J/mol K]

(English) Exercise II

One mole of a diatomic ideal gas undergoes a reversible cyclic transformation consisting of the following processes: 1) an isothermal compression (from A to B) while keeping the gas in contact with a thermal reservoir at temperature T_A; 2) the gas is then brought into thermal contact with a thermal reservoir at temperature T_C, keeping the volume constant (from B to C) until equilibrium is reached; 3) an adiabatic expansion (from C to A) follows, which returns the gas to its initial state.
The temperatures are given as $T_A=T_B=250$ K and $T_C=500$ K, and it is known that $V_B=V_C$.
a) Draw the cycle on a Clapeyron (P–V) diagram.
b) Calculate the efficiency of the cycle.
c) Calculate the change in entropy of the gas along the transformation that, passing through B, takes it from A to C.
d) After one cycle, what is the change in entropy of the universe (i.e., of the gas together with the two thermal reservoirs)?
[Boltzmann constant=$1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K; ideal gas constant=8.314 J/mol K]

(Italiano) Esercizio III
Calcolare il diametro di un filo di rame (ρ=168 × 10^{-8} Ωm) in cui circola una corrente di 40 A, affinché dissipi una potenza di 1.6 W per ogni metro di lunghezza.

(English) Exercise III
Calculate the diameter of a copper wire (ρ=168 × 10^{-8} Ωm) carrying a current of 40 A, so that it dissipates a power of 1.6 W per meter of length.

(Italiano) Esercizio IV
Una radiazione monocromatica di lunghezza d'onda λ = 240 nm incide su una superficie metallica con lavoro di estrazione W = 2.3 eV.
Gli elettroni emessi entrano in una regione dove è presente un campo elettrico uniforme $E = 5.0 \times 10^3$ V/m, diretto in verso opposto alla loro velocità iniziale.

1. Calcolare l'energia cinetica massima degli elettroni emessi.
2. Determinare la distanza massima percorsa dagli elettroni prima di fermarsi.
3. Calcolare il tempo di arresto degli elettroni.

(costante di Planck h = 6.63 x 10^{-34} J s, massa dell'elettrone m = 9.11 x 10^{-31} Kg, carica dell'elettrone e = 1.6 x 10^{-19} C, velocità della luce nel vuoto c = 3 x 10^8 m/s)

(English) Exercise IV
A monochromatic radiation with wavelength λ = 240 nm is incident on a metal surface with a work function W = 2.3 eV.
The emitted electrons enter a region where a uniform electric field $E = 5.0 \times 10^3$ V/m is present, directed opposite to their initial velocity.

1. Calculate the maximum kinetic energy of the emitted electrons.
2. Determine the maximum distance traveled by the electrons before coming to rest.
3. Calculate the stopping time of the electrons.

(Planck's constant h = 6.63 x 10^{-34} J s, electron mass m = 9.11 x 10^{-31} Kg, electron charge e = 1.6 x 10^{-19} C, speed of light in the vacuum c = 3 x 10^8 m/s)

(Italiano) Esercizio V
Si consideri un sistema quantistico a due livelli (qubit), descritto dagli autostati ortonormali

$$|0\rangle, \qquad |1\rangle,$$

che sono anche autostati dell'Hamiltoniana

$$\hat{H} = E_0\,|0\rangle\langle 0| + E_1\,|1\rangle\langle 1|, \qquad E_1 > E_0.$$

All'istante t = 0 il sistema si trova nello stato

$$|\psi(0)\rangle = \mathcal{N}\left(|0\rangle + 2\,|1\rangle\right).$$

1. Determinare la costante di normalizzazione N.
2. Calcolare il valore medio dell'energia $\langle H \rangle$ allo stato iniziale.
3. Scrivere lo stato $|\psi(t)\rangle$ per $t > 0$ sotto l'evoluzione generata da $\hat{H}$.
4. Calcolare la probabilità $P_0(t)$ di misurare l'energia E_0 al tempo t.

Nel caso in cui tale probabilità risulti indipendente dal tempo, spiegare il motivo fisico.

(English) Exercise V

Consider a two-level quantum system (qubit), described by the orthonormal eigenstates

$$|0\rangle, \qquad |1\rangle,$$

which are also eigenstates of the Hamiltonian

$$\hat{H} = E_0\,|0\rangle\langle 0| + E_1\,|1\rangle\langle 1|, \qquad E_1 > E_0.$$

At time t=0 the system is in the state

$$|\psi(0)\rangle = \mathcal{N}\left(|0\rangle + 2\,|1\rangle\right).$$

1) Determine the normalization constant N.
2) Calculate the expectation value of the energy $\langle H \rangle$ in the initial state.
3) Write the state $|\psi(t)\rangle|$ for $t>0$ under the evolution generated by $\hat{H}$.
4) Calculate the probability $P_0(t)$ of measuring the energy E_0 at time t.

If this probability turns out to be time-independent, explain the physical reason.

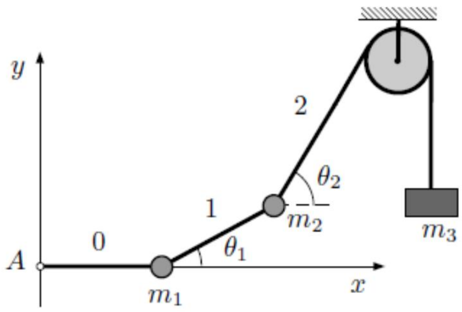
Dottorato di ricerca in Fisica — Università di Catania Prova scritta di ammissione XLI ciclo — 16/01/2026

Nota per i candidati: lasciare indicati tutti i passaggi effettuati
Note to the candidates: write down all the steps followed.

Compito III (Test III)

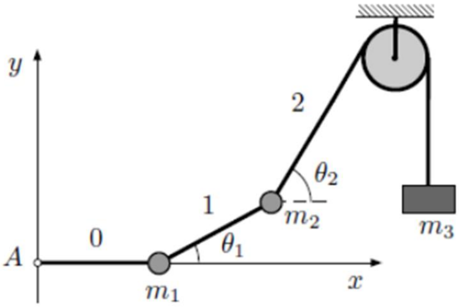
(Italiano) Esercizio I

L'estremo sinistro di una corda ideale (inestensibile e di massa trascurabile) è agganciato al punto fisso A (coincidente con l'origine degli assi). All'altro estremo, dopo che è stato fatto passare su una puleggia (libera di ruotare intorno ad un asse per il suo centro), è agganciato un corpo di massa m_3 (vedi figura). Lungo la corda (ad uguali distanze) sono fissati due corpi puntiformi di massa m_1=1.50 kg e m_2. Il sistema è in equilibrio statico e in tali condizioni (come indicato in figura) il tratto 0 della corda è orizzontale, mentre i tratti 1 e 2 formano gli angoli θ_1=30° e θ_2=60° con l'orizzontale. Trattando le sfere come oggetti puntiformi, determinare:
a) le tensioni T_0, T_1 e T_2 dei corrispondenti tratti di corda;
b) il valore di m_2;
c) il valore di m_3.
(accelerazione di gravità=9.81 m/s^2)



(English) Exercise I

The left end of an ideal rope (inextensible and of negligible mass) is attached to a fixed point A (coincident with the origin of the axes). At the other end, after passing over a pulley (free to rotate about an axis through its center), a body of mass m_3 is attached (see figure). Along the rope, at equal distances, two point-like bodies of masses m_1=1.50 kg and m_2 are fixed.
The system is in static equilibrium, and under these conditions (as indicated in the figure) the segment 0 of the rope is horizontal, while segments 1 and 2 form angles θ_1=30° and θ_2=60° with the horizontal. Treating the spheres as point-like objects, determine:
a) the tensions T_0, T_1, and T_2 in the corresponding rope segments;
b) the value of m_2;
c) the value of m_3.
(gravitational acceleration=9.81 m/s^2)



(Italiano) Esercizio II

Una mole di gas ideale monoatomico compie un ciclo ABC, in cui AB è una espansione adiabatica irreversibile, BC una isobara reversibile che riporta il gas al volume iniziale, CA una isocora reversibile che chiude il ciclo. Sapendo che $T_A=2T_B$ e $\Delta S_{BC}+\Delta S_{CA}=-6$ J/K, dopo aver disegnato il ciclo in un piano PV, calcolarne il rendimento.

[costante di Boltzmann=$1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K; costante dei gas ideali=8.314 J/mol K]

(English) Exercise II

One mole of a monoatomic ideal gas undergoes a cycle ABC, in which: AB is an irreversible adiabatic expansion, BC is a reversible isobaric process that returns the gas to its initial volume, CA is a reversible isochoric process that closes the cycle.

Knowing that $T_A=2T_B$ and $\Delta S_{BC}+\Delta S_{CA}=-6$ J/K, after drawing the cycle on a P–V diagram, calculate its efficiency.

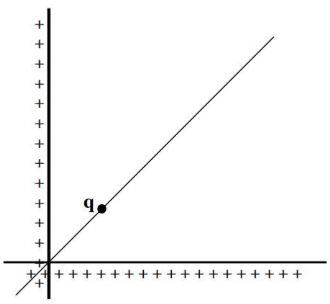
[Boltzmann constant=$1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K; ideal gas constant=8.314 J/mol K]

(Italiano) Esercizio III

Due fili isolanti molto lunghi, carichi positivamente con densità di carica uniforme $\lambda = 8$ nC / m si incrociano ad angolo retto. Una particella di carica positiva $q = 2$ μC e massa $m = 1.2$ g si trova inizialmente ferma nella posizione P($x_1 = y_1 = 0.1$ m). Calcolare:

1. L'intensità del campo elettrico generato dalla coppia di fili nel punto P.
2. La forza che la particella subisce nel punto P.
3. La velocità della particella dopo che ha percorso la distanza $d = 0.75$ m.

[costante dielettrica del vuoto=$8.85 \cdot 10^{-12}$ C^2/Nm^2]

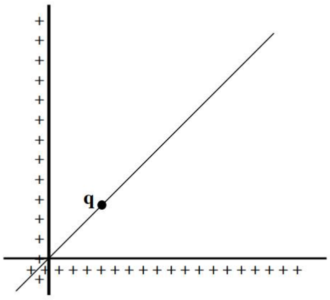


(English) Exercise III

Two very long insulating wires, each uniformly charged with a linear charge density $\lambda = 8$ nC / m, intersect at a right angle. A positively charged particle with charge $q = 2$ μC and mass $m = 1.2$ g is initially at rest at the position P($x_1 = y_1 = 0.1$ m). Calculate:

1. The magnitude of the electric field generated by the pair of wires at point P.
2. The force experienced by the particle at point P.

3. The velocity of the particle after it has traveled a distance d = 0.75 m.
[vacuum dielectric constant=8.85 · 10^{-12} C^2/Nm^2]



(Italiano) Esercizio IV
Un fotone di energia iniziale E_0=0.8 MeV incide su un elettrone libero inizialmente a riposo. Dopo l'urto Compton, il fotone viene diffuso con un angolo θ=60° rispetto alla direzione iniziale.
Calcolare l'energia cinetica dell'elettrone dopo l'urto, il modulo della sua quantità di moto relativistica e la sua velocità in unità della velocità della luce c.
(massa dell'elettrone m = 9.11 x 10^{-31} Kg, velocità della luce nel vuoto c = 3 x 10^8 m/s)

(English) Exercise IV
A photon with initial energy E_0 = 0.8 MeV is incident on a free electron initially at rest. After the Compton scattering, the photon is scattered at an angle θ = 60° with respect to its initial direction.
Calculate the kinetic energy of the electron after the collision, the magnitude of its relativistic momentum, and its velocity in units of the speed of light c.
(electron mass m = 9.11 x 10^{-31} Kg, light speed in vacuum c = 3 x 10^8 m/s)

(Italiano) Esercizio V
Si consideri un sistema quantistico a due livelli, descritto dagli autostati ortonormali

$$|0\rangle, \qquad |1\rangle,$$

che sono anche autostati dell'Hamiltoniana non perturbata

$$\hat{H}_0 = E_0\,|0\rangle\langle 0| + E_1\,|1\rangle\langle 1|, \qquad E_1 > E_0.$$

Si introduca la perturbazione

$$\hat{V} = \lambda\Big(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|\Big),$$

con λ reale, indipendente dal tempo e sufficientemente piccolo da poter applicare la teoria delle perturbazioni stazionaria. L'Hamiltoniana totale è quindi

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}.$$

1) Scrivere la rappresentazione matriciale di $\widehat{H_0}$ e $\widehat{V}$ nella base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

2) Utilizzando la teoria delle perturbazioni, calcolare le correzioni del primo ordine $E_0^{(1)}$ ed $E_1^{(1)}$ agli autovalori non perturbati E_0 ed E_1.
3) Calcolare le correzioni del secondo ordine $E_0^{(2)}$ ed $E_1^{(2)}$ agli autovalori.
4) Discutere il risultato trovato.

(English) Exercise V
Consider a two-level quantum system, described by the orthonormal eigenstates

$$|0\rangle, \qquad |1\rangle,$$

which are also eigenstates of the unperturbed Hamiltonian

$$\hat{H}_0 = E_0\,|0\rangle\langle 0| + E_1\,|1\rangle\langle 1|, \qquad E_1 > E_0.$$

Introduce the perturbation

$$\hat{V} = \lambda\Big(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|\Big),$$

with λ real, time-independent, and sufficiently small so that stationary perturbation theory can be applied. The total Hamiltonian is then

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}.$$

1) Write the matrix representation of $\widehat{H_0}$ e $\widehat{V}$ in the $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ basis.
2) Using perturbation theory, calculate the first-order corrections $E_0^{(1)}$ and $E_1^{(1)}$ to the unperturbed eigenvalues E_0 ed E_1.
3) Calculate the second-order corrections $E_0^{(2)}$ ed $E_1^{(2)}$ to the eigenvalues.
4) Discuss the result obtained.